Δ.Ε. 1ης Τάξεως Χωριζομένων Μεταβλητών.

6

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \Phi(x, y(x)) = f(x)\cdot g(y(x))}$$

παράδειγμα: $\frac{dy}{dx} = x e^{y}$ ή $y' = \eta\mu x \, \sigma\upsilon\nu y$

ή Δ.Ε $y'(x) = \eta\mu(x + y(x))$ δεν είναι Χωρ. Μ.

ΛΥΣΗ της Δ.Ε. Χωρ. Μεταβλητών

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y(x)) \Leftrightarrow y'(x) = f(x)\cdot g(y(x))$$

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx =$$

$$= \int f(x)\,dx \quad (1)$$

Θέτουμε $u(\cancel{x}) = y(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = y'(x) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow du = y'(x)\,dx$ και η (1) γίνεται

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f(x)\,dx$$, χάριν αφλόπητος θέτουμε $u=y$ και έχουμε

$$\boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx}$$

Άσκηση: Να λυθεί η $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

Λύση: Καταρχάς θρέθα $x \neq 0$. Η Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών, και έχουμε:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}, \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy/dx}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln\lambda$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln \lambda \cdot |x| \Rightarrow |y| = \lambda|x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \rho x}$$

Άσκηση: Να βρεθεί λύση (8) της Δ.Ε.

$$\frac{x}{1+y} - \frac{y}{1+x} \cdot y' = 0 \quad (E)$$

η οποία ικανοποιεί την σχέση: $y(1) = 1$.

Λύση: Προφανώς $y \neq -1$, $x \neq -1$

$$(E) \rightarrow \frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \cdot \frac{dy}{dx} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int x(1+x)\,dx = \int (1+y)\,y\,dy \rightarrow$$

$$\rightarrow \int (x+x^2)\,dx = \int (y+y^2)\,dy \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c_1 = \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + c_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c = 0}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

Άσκηση: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y' = (x-y)^2 \quad (*)$$

Λύση: Αυτή η Δ.Ε. δεν είναι χωριζομένων μεταβλητών. Θέτω $w = x - y$ ή καλύτερα

$$w(x) = x - y(x) \Longrightarrow w'(x) = 1 - y'(x)$$

οπότε η $(*)$ γίνεται:

$$1 - w'(x) = w^2(x) \rightarrow \boxed{1 - w' = w^2}$$

$$\Longrightarrow w' = 1 - w^2 \Longrightarrow \frac{dw}{dx} = 1 - w^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{dw}{1-w^2} = dx \Longrightarrow \int \frac{dw}{1-w^2} = \int dx$$

Αλλά $\displaystyle\int \frac{dw}{1-w^2} = \int \left[\frac{1/2}{1-w} + \frac{1/2}{1+w} \right] dw =$

$$= -\tfrac{1}{2} \ln|1-w| + \tfrac{1}{2} \ln|1+w| \quad \text{και} \quad \int dx = x + c_1$$

οπότε $\ln\left[(1-w)^{-1/2} \cdot (1+w)^{1/2}\right] = x + c_1 \Longrightarrow$

$$\boxed{\sqrt{\frac{1+x-y}{1-x+y}} = e^{x+c_1}}$$

Άσκηση: Να βρεθεί συνάρτηση ζήτησης με σταθερή ελαστικότητα.

Λύση: Έστω $D(p)$ συνάρτηση ζήτησης με ελαστικότητα ε_D. Ζητάμε $\varepsilon_D = k$, k σταθερά. Οπότε:

$$\varepsilon_D = k \rightarrow \frac{\frac{dD}{dp}}{\frac{D}{p}} = k \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dD}{dp} \cdot \frac{p}{D} = k \Rightarrow \frac{dD}{D} = k \frac{dp}{p} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{dD}{D} = k \int \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln D = k \ln p + C_1$$

$$\Rightarrow \ln D = \ln p^k + \ln \lambda = \ln \lambda \cdot p^k, \ \lambda \text{ σταθερά}$$

$$\Rightarrow \boxed{D(p) = \lambda \cdot p^k}, \quad k, \lambda \text{ σταθερές}$$

Επαλήθευση: $\varepsilon_D = D' \cdot \frac{p}{D} =$

$$= \frac{\lambda k p^{k-1} \cdot p}{\lambda p^k} = k \ //.$$

Άσκηση: Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των καμπύλων

$$x^2 + y^2 = c\,x \qquad (\text{k})$$

c αυθαίρετη σταθερά.

Λύση: Ζητάμε συνάρτηση $z(x)$, όπου

(1) $z(x_0) = y(x_0)$

(2) $z'(x_0) \cdot y'(x_0) = -1$

για κάποιο x_0, που αλλάζει

(k) $\Rightarrow \quad y'(x_0) = \dfrac{c - 2x_0}{2y(x_0)} \xRightarrow{(2)}$

$\Rightarrow \quad z'(x_0) \cdot \dfrac{c - 2x_0}{2y(x_0)} = -1 \xRightarrow{(1)}$

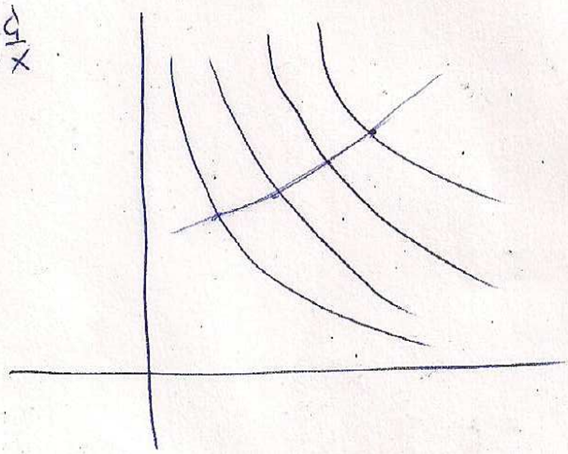
$\Rightarrow \quad z' \cdot \dfrac{c - 2x}{2z} = -1$ χωριζομένων μεταβ.

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dz}{2z} = -\int \frac{dx}{c - 2x} \Rightarrow \quad \dots\dots$

$\dots\dots \Rightarrow \quad \boxed{z(x) = k - 2\lambda x}$

k, λ σταθερές, άρα ευθεία

Άσκηση: Βρείτε ~~τις~~ μία ορθογώνια των ισοϋψών της $F(x,y)=xy$



Λύση: $xy=c \rightarrow y(x)=\frac{c}{x} \Rightarrow$

Έστω με $z(x)$:

Για κάθε x του π.ορ.

1) $z(x)$ τέμνει κάποια ισοϋψή

2) την τέμνει κάθετα

Άρα, για κάθε x του π.ορ της $z(x)$, υπάρχει c

: $z(x)=y(x)$

$z'(x)\cdot y'(x)=-1 \Rightarrow z'(x)\cdot\left(-\frac{c}{x^2}\right)=-1 \Rightarrow$

$\frac{dz}{dx}=\frac{x^2}{c} \Leftrightarrow dz=\frac{x^2}{c}dx \Rightarrow \int dz=\int\frac{x^2}{c}dx \Rightarrow$

$z=\frac{x^3}{3c}+k$

~~αλλά~~ $\cancel{z(x)=y(x)=\frac{c}{x} \Rightarrow \frac{c}{x}=\frac{x^3}{3c}+k}$

Άσκηση: Ο ρυθμός μεταβολής της αξίας κάποιου νομίσματος είναι -8% της αξίας του, για κάθε χρονική στιγμή. Σε πόσο χρόνο η αξία του θα είναι το ήμισυ της αρχικής; (12)

Λύση: Ρυθμός Μεταβολής $= -8\%$ της αξίας του

$\Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = -0.08V$, όπου $V(t)$ η τρέχουσα αξία του.

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dV}{V} = \int -0.08\,dt \Rightarrow \ln V = -0.08t + c_1$

$\Rightarrow V = e^{-0.08t + c_1} = e^{-0.08t} \cdot e^{c_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{V(t) = K \cdot e^{-0.08t}}$

Έστω ότι για $t=0 \Rightarrow V(0) = V_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V(0) = K e^0 \Rightarrow K = V_0 \Rightarrow$

$\boxed{V(t) = V_0 e^{-0.08t}}$ ζητάμε t^*:

$V(t^*) = \dfrac{V_0}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = e^{-0.08t^*} \Rightarrow \boxed{t^* = \dfrac{-\ln 1/2}{0.08}}$

Άσκηση: Έστω $y(t)$ η ποσότητα ενός πληθυσμού την χρονική στιγμή t. Έστω ότι ο πληθυσμός αυτός ακολουθεί την Δ.Ε. του Verhulst

$$y'(t) = y(\alpha - \beta y) \quad \alpha, \beta \text{ σταθερές})$$

Βρείτε την οριακή έκβαση του πληθυσμού.

Λύση: Η Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dy}{y(\alpha-\beta y)} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y(\alpha-\beta y)} = \int dt$$

αλλά $\displaystyle \frac{1}{y(\alpha-\beta y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{\alpha-\beta y} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1/\alpha \\ B = \frac{\beta}{\alpha} \end{array}$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(\alpha-\beta y)} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dy}{y} + \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dy}{\alpha-\beta y} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\ln y - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\ln(\alpha-\beta y) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{y}{\alpha-\beta y}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{y}{\alpha-\beta y}\right)^{1/\alpha}}$$

Προφανώς $\int dt = t + c_1$ και τελικά:

$$\ln\left(\frac{y}{\alpha-\beta y}\right)^{1/\alpha} = t + c_1 \Rightarrow \left(\frac{y}{\alpha-\beta y}\right)^{1/\alpha} = e^{t+c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\alpha-\beta y} = e^{\alpha t + \alpha c_1} = e^{\alpha t}\cdot \boxed{e^{\alpha c_1}} = K$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\alpha-\beta y} = K e^{\alpha t} \Rightarrow y(t) = \frac{\alpha}{\beta + K^{-1} e^{-\alpha t}}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $y(0) = y_0$ βρίσκουμε τελικά

$$\boxed{y(t) = \frac{\alpha}{\beta + \left(\frac{\alpha}{y_0} - \beta\right) e^{-\alpha t}}}$$

Επίσης $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha}{\beta + \left(\frac{\alpha}{y_0} - \beta\right) e^{-\alpha t}} =$

$$= \frac{\alpha}{\beta + 0} = \boxed{\frac{\alpha}{\beta}}$$

//

Άσκηση: Έστω $u(x)$ η συνάρτηση επένδυσης. Η συνάρτηση κινδύνου, κατά Arrow-Pratt είναι: $$V(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \cdot x$$

Να βρεθεί η συνάρτηση επένδυσης που διατηρεί τον "κίνδυνο" σταθερό.

Λύση: Ζητάμε συνάρτηση $u(x)$ έτσι ώστε:

$$\left.\begin{aligned} V(x) = \lambda \Rightarrow -\frac{u''(x)}{u'(x)} \cdot x = \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Έστω $u'(x) = \varphi(x)$

$$\Rightarrow -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot x = \lambda \Rightarrow -\frac{d\varphi}{\varphi} = \lambda \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \lambda \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln \varphi = \lambda \ln x + c_1$$

$$\Rightarrow \ln \varphi^{-1} = \ln k x^{\lambda} \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \frac{1}{k} x^{-\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{1}{k} x^{-\lambda} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{k} \int x^{-\lambda} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = \frac{1}{k} \begin{cases} \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} + c_1 & \lambda \neq 1 \\ \ln x + c_1 & , \lambda = 1 \end{cases}}$$

Άσκηση: Υπόδειγμα του Domar Απρίλιος 1946

Έστωσαν οι παρακάτω συναρτήσεις

$Q(t)$: συνάρτηση δυνητικής παραγωγής.

$Y(t)$: » εισοδηματικής ροής (ζήτηση)

$I(t)$: » επενδυτικής ροής.

$K(t)$: » αποθέματος κεφαλαίου.

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{dK}{dt} = I, \quad Q = \rho K, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt} \cdot \frac{1}{s}$$

όπου ρ, s σταθερές (η s λέγεται οριακή ροπή πρός κατανάλωση).

(1) Να σχολιασθεί τό υπόδειγμα.

(2) Να βρεθεί τό $I(t)$ ώστε $Y(t) = Q(t)$ ("συνθήκη ισορροπίας").

Λύση: (1) . . .

(2) Ζητάμε $Y(t) = Q(t) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad Y(t) = \rho K(t) \Rightarrow \frac{dY}{dt} = \rho \frac{dK}{dt} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Longrightarrow \frac{dK}{dt} = I \\ &\text{αλλά } \frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} \cdot \frac{1}{s} = \rho I} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\chi.\mu\varepsilon\tau.} \quad \frac{dI}{I} = \rho s\, dt \Rightarrow \int \frac{dI}{I} = \rho s \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln I = \rho s t + C_1 \Rightarrow I = e^{\rho s t + C_1} = e^{\rho s t} \cdot C$$

Χρησιμοποιώντας τό γεγονός ότι $I(0) = I_0$

βρίσκουμε $C = I_0$ καί άρα τελικά

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{\rho s t}}$$

Επομένως, γιά νά έχουμε ισορροπία πρέπει η επενδυτική ροή να αυξάνεται συνεχώς. (συνέχεια επενδύσεων)