



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΔΕ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

17/9/2021

Να γραφούν όλα τα ακόλουθα βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις ώρες.

Θέμα 1ο. (α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ είναι αρμονική,

δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace στις τρεις διαστάσεις:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

(β) Έστω $z = f(x, y)$ με $x = 2s + t$ και $y = s - t$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a, b και c έτσι ώστε

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Μπορείτε να υποθέσετε ότι η $z = f(x, y)$ είναι λεία συνάρτηση έτσι ώστε ο κανόνας της αλυσίδας και το θεώρημα του Clairaut για την ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων ισχύουν.

Θέμα 2ο. (α) Έστω $z = f(x, y)$ μια πραγματική συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και y η οποία ορίζεται πεπλεγμένα μέσω ενός περιορισμού της μορφής $G(x, y, z) = 0$. Να βρεθούν τύποι για τις μερικές

παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ σε όρους των μερικών παραγώγων G_x, G_y, G_z . Να χρησιμοποιηθούν οι συγκεκριμένοι

τύποι για να υπολογιστούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ αν $G(x, y, z) = \sin(xyz)$. (β) Δίνεται το υπόδειγμα IS-LM

$$Y = C(Y - T(Y)) + I(r) + G : IS$$

$$L(Y, r) = M : LM .$$

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι συγκριτικής στατικής $\frac{dY}{dG}, \frac{dr}{dG}, \frac{dY}{dM}, \frac{dr}{dM}$.

Θέμα 3ο. (α) Να γραφούν οι συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους της επιχείρησης $\pi(x_1, x_2) = pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$. (β) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι

συγκριτικής στατικής $\frac{\partial x_1}{\partial w_1}, \frac{\partial x_2}{\partial w_1}, \frac{\partial x_1}{\partial w_2}, \frac{\partial x_2}{\partial w_2}$ (θέστε $p = 1$).

Θέμα 4ο. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στο σημείο $P(3, 4, 0)$ και την επιφάνεια του κώνου $z^2 = x^2 + y^2$.