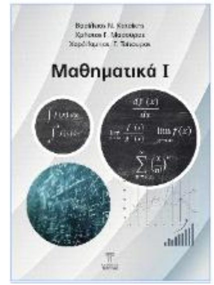
Εφαρμογές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού στις Οικονομικές Επιστήμες (ΣΥΝΕΧΕΙΑ-2) - Κεφάλαιο XIII

Ημερομηνία διάλεξης: 19-12-2024

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση,
Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3
Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Πλεόνασμα καταναλωτή και πλεόνασμα παραγωγού (Βιβλίο-Κεφάλαιο XIII) :

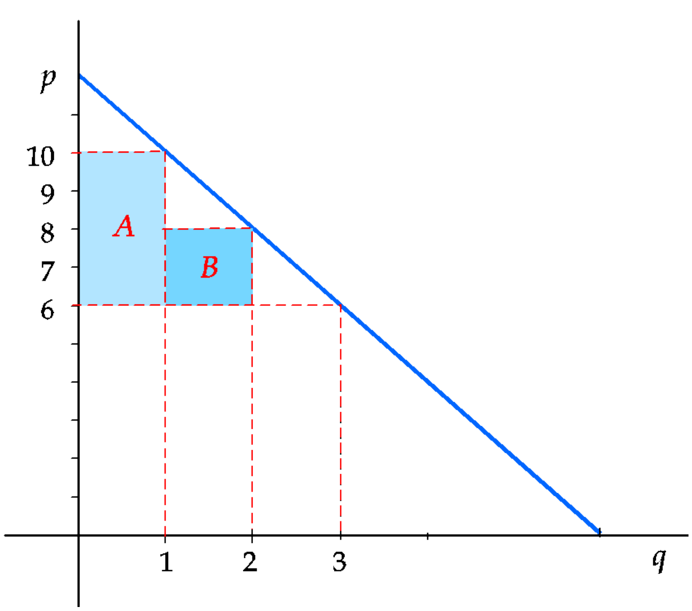
Συμβαίνει συχνά, όταν αγοράζουμε κάποιο προϊόν να αναρωτηθούμε: «Αξίζει άραγε τα λεφτά του;». Ακόμη δεν είναι λίγες οι φορές, που όταν θέλουμε να αποκτήσουμε ένα προϊόν, προβληματιζόμαστε για το ύψος του χρηματικού ποσού που είμαστε διατεθειμένοι να καταβάλουμε γι' αυτό. Έτσι όταν αγοράζουμε ένα προϊόν σε μία τιμή χαμηλότερη από εκείνη που αρχικά είμαστε διατεθειμένοι να προσφέρουμε, αισθανόμαστε ικανοποιημένοι διότι αφενός αγοράσαμε το προϊόν, αφ' ετέρου μας περίσσεψαν χρήματα, δημιουργήθηκε δηλαδή ένα πλεόνασμα. Τη διαφορά ανάμεσα στο ποσό που είναι πρόθυμος να πληρώσει ο καταναλωτής για την απόκτηση κάποιας ποσότητας ενός αγαθού και του ποσού που στην πραγματικότητα πληρώνει, ονομάσθηκε από τον Άγγλο οικονομολόγο Alfred Marshall (1842-1924) **πλεόνασμα του καταναλωτή** (*customer surplus*) και καθιερώθηκε να συμβολίζεται με CS. Αντίστοιχα και ο παραγωγός προβληματίζεται για την τιμή διάθεσης του προϊόντος του. Όταν πωλεί το προϊόν του σε τιμή υψηλότερη από αυτήν που προσδοκούσε, αισθάνεται ικανοποιημένος διότι αφενός διέθεσε το προϊόν του, αφετέρου δημιουργήθηκε σε αυτόν ένα πλεόνασμα, αφού το προϊόν του δόθηκε σε υψηλότερη τιμή από αυτή που αρχικά ήταν διατεθειμένος να το προσφέρει. Δημιουργήθηκε συνεπώς αυτό που ονόμασε ο Alfred Marshall **πλεόνασμα του παραγωγού** (*producer surplus*) και το οποίο καθιερώθηκε να συμβολίζεται με PS.

Ας υποθέσουμε ότι ένας οδοιπόρος βαδίζει εξαντλημένος, κάτω από τον καυτό ήλιο. Μπροστά του υπάρχει ένα χωριό. Με μεγάλη προσμονή περιμένει να φθάσει στην αγορά του χωριού και να αγοράσει ζουμερά φρούτα για να σβήσει τη δίψα και την πείνα του. Σκέφτεται, ότι με τα χρήματα που έχει μαζί του, μπορεί να πληρώσει μέχρι και 10 νομισματικές μονάδες για ένα κιλό φρούτα. Εξετάζοντας πάλι τα χρήματά του αναλογίζεται ότι μπορεί να αγοράσει και ένα δεύτερο κιλό φρούτα, αλλά αφού, με την αρχική του αγορά, θα έχει ξεδιψάσει και θα αισθάνεται αρκετά χορτάτος, δεν θα είναι διατεθειμένος να πληρώσει το ίδιο ποσό και για το δεύτερο κιλό. Σκέπτεται λοιπόν ότι για το δεύτερο κιλό φρούτα μπορεί να δώσει μέχρι 8 νομισματικές μονάδες. Βέβαια, επειδή σκοπεύει να συνεχίσει το ταξίδι του, θεωρεί ότι καλό θα ήταν να είχε μαζί του κάποια επιπλέον φρούτα, ώστε να μην φθάσει πάλι σε τέτοιο σημείο εξάντλησης. Όμως δεν είναι διατεθειμένος να πληρώσει πάνω από 6 νομισματικές μονάδες για το τρίτο κιλό φρούτα.

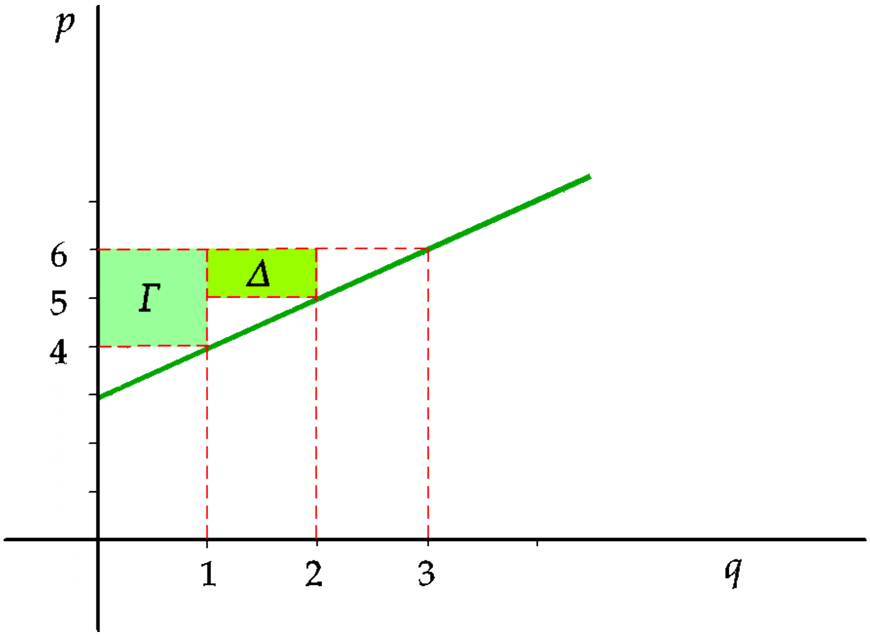
Από την απέναντι πλευρά κατευθύνεται προς την αγορά του χωριού ένας αγρότης που πηγαίνει να πουλήσει τα φρούτα του. Όπως ο ταξιδιώτης έτσι και αυτός κάνει τους υπολογισμούς του. Είναι αποφασισμένος να μην πουλήσει τα φρούτα του κάτω από 4 νομισματικές μονάδες το κιλό. Σκέφτεται μάλιστα ότι αν υπάρχει ζήτηση για φρούτα στην αγορά, για κάθε μια νομισματική μονάδα που θα ανεβαίνει η τιμή του κιλού, αυτός να προσφέρει ένα επιπλέον κιλό. Έτσι αν η τιμή διαμορφώνεται στις 5 νομισματικές μονάδες θα προσφέρει 2 κιλά ενώ, αν είναι τυχερός και διαμορφωθεί στις 6 νομισματικές μονάδες, τότε θα προσφέρει 3 κιλά φρούτα.

Τα δύο πρόσωπα του παραδείγματός μας φθάνουν στην αγορά του χωριού και παρατηρούν πως διαμορφώνονται οι τιμές των φρούτων από τους αγοραστές και τους πωλητές. Ο οδοιπόρος πλησιάζει τον αγρότη και τον ρωτά αν του δίνει 3 κιλά φρούτα προς 6 νομισματικές μονάδες το κιλό. Ο αγρότης με χαρά δέχεται την προσφορά του οδοιπόρου και έτσι γίνεται η συναλλαγή στο σημείο ισορροπίας που δημιούργησαν στην αγορά ο ταξιδιώτης και ο αγρότης. Και οι δύο είναι περιχαρείς. Ο οδοιπόρος ήταν διατεθειμένος να δώσει 10 νομισματικές μονάδες για το πρώτο κιλό φρούτα, 8 για το δεύτερο και 6 για το τρίτο. Δηλαδή ήταν διατεθειμένος να δώσει 10+8+6=24 νομισματικές μονάδες. Αντί για αυτό έδωσε 6x3=18 νομισματικές μονάδες. Του περίσσεψαν δηλαδή 6 νομισματικές μονάδες. Ο αγρότης από την άλλη μεριά ήταν διατεθειμένος να πωλήσει προς 4 νομισματικές μονάδες το πρώτο κιλό φρούτα, προς 5 το δεύτερο και προς 6 το τρίτο. Προσδοκούσε δηλαδή να εισπράξει 4+5+6=15 νομισματικές μονάδες. Αντί για αυτό εισέπραξε 6x3=18 νομισματικές μονάδες. Δηλαδή του δημιουργήθηκε ένα πλεόνασμα τριών νομισματικών μονάδων.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε με διαγράμματα την ιστορία που περιγράψαμε παραπάνω.



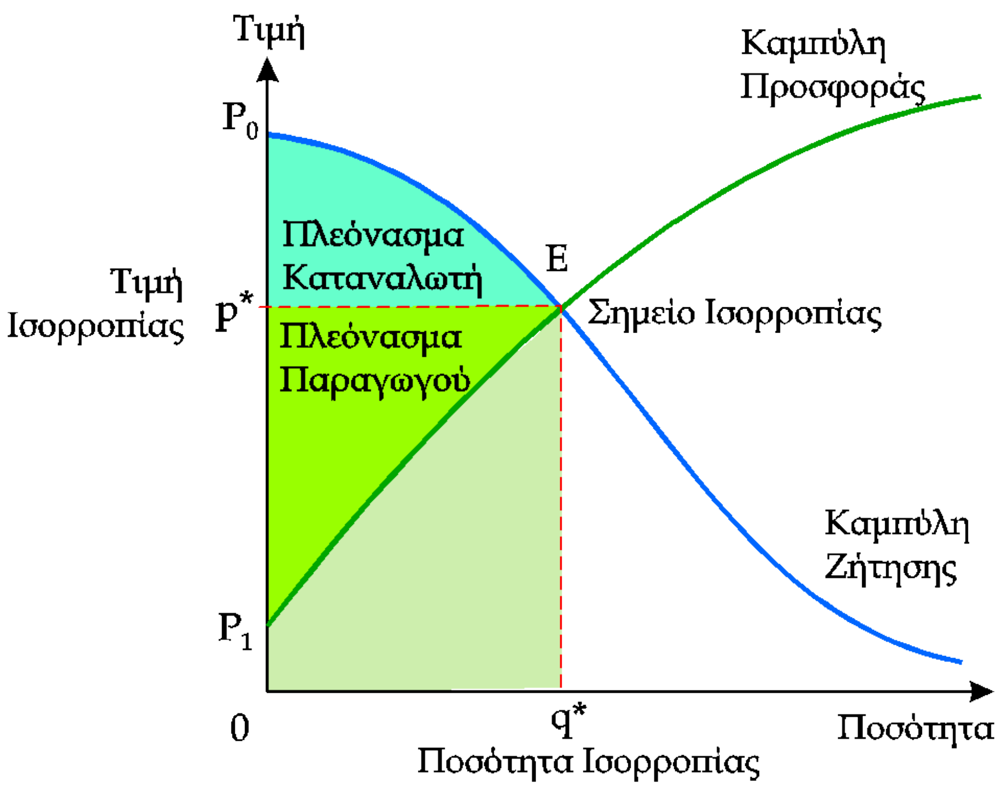
Περιοχή Α: Το πλεόνασμα καταναλωτή-ταξιδιώτη για την 1η μονάδα του αγαθού
Περιοχή Β: Το πλεόνασμα καταναλωτή-ταξιδιώτη για την 2η μονάδα του αγαθού



Περιοχή Γ: Το πλεόνασμα παραγωγού-αγρότη για την 1η μονάδα του αγαθού
Περιοχή Δ: Το πλεόνασμα παραγωγού-αγρότη για την 2η μονάδα του αγαθού

Από το σχήμα 16 προκύπτει ότι το άθροισμα των περιοχών Α και Β μας δίνει το όφελος του καταναλωτή-οδοιπόρου από την αγορά των φρούτων. Δηλαδή το συνολικό πλεόνασμα καταναλωτή δίνεται κατά προσέγγιση από το εμβαδόν της περιοχής κάτω από την γραμμή ζήτησης και πάνω από την τιμή ισορροπίας. Λέμε «κατά προσέγγιση» γιατί στο παράδειγμά μας χρησιμοποιήσαμε ακέραιες μονάδες αγαθού. Αν ένα αγαθό μπορεί να πωληθεί σε οποιαδήποτε ποσότητα, τότε το πλεόνασμα του καταναλωτή θα είναι ακριβώς το εμβαδόν της περιοχής κάτω από την γραμμή ζήτησης και πάνω από την τιμή ισορροπίας. Αντίστοιχα ισχύουν για το πλεόνασμα παραγωγού. Το όφελος του παραγωγού-αγρότη από την πώληση των φρούτων δίνεται από το άθροισμα των περιοχών Γ και Δ του σχήματος 17. Δηλαδή το όφελος του παραγωγού-αγρότη ισούται κατά προσέγγιση με το εμβαδόν της περιοχής πάνω από την γραμμή προσφοράς και κάτω από την τιμή ισορροπίας. Και πάλι, αν υποθέσουμε ότι ένα αγαθό μπορεί να πωληθεί σε οποιαδήποτε ποσότητα και όχι μόνο σε ακέραιες μονάδες, τότε το πλεόνασμα του παραγωγού θα είναι ακριβώς το εμβαδόν της παραπάνω περιοχής. Αυτό φαίνεται καθαρά στο σχήμα 18 που ακολουθεί.

Στο σχήμα 18 παρουσιάζεται η καμπύλη ζήτησης και η καμπύλη προσφοράς ενός αγαθού, οι οποίες είναι συνεχείς γραμμές, καθώς και το σημείο ισορροπίας Ε. Η τιμή $p*$ του αγαθού στο σημείο ισορροπίας είναι αυτή που οι καταναλωτές είναι διατεθειμένοι να καταβάλουν, για να αγοράσουν την ποσότητα $q*$, την οποία προσφέρουν οι παραγωγοί. Στο σημείο ισορροπίας οι καταναλωτές πληρώνουν και οι παραγωγοί εισπράττουν το ποσό των $p*\cdot\ q*$ νομισματικών μονάδων. Το ποσό αυτό αριθμητικά ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου 0p∗Eq∗" ."



Σχήμα 18

Παρατηρώντας με προσοχή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 0p∗Eq∗"αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό αποτελείται από το άθροισμα των δύο περιοχών $0P_1Eq*$" και P_1p*E" δηλαδή: ,"

$$(0p*Eq*) = \left(0P_1Eq*\right) + \left(P_1p*E\right)$$

Ας εξετάσουμε αρχικά τον πρώτο προσθετέο. Προς τα άνω η περιοχή $0P_1Eq*$"φράσσεται από την καμπύλης της προσφοράς. Πάνω στην καμπύλη προσφοράς βρίσκονται οι ελάχιστες τιμές στις οποίες οι παραγωγοί είναι διατεθειμένοι να πωλήσουν το προϊόν τους. Συνεπώς το ποσό που θα εισέπρατταν, αν διέθεταν το προϊόν τους στις ελάχιστες τιμές, ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν της περιοχής $0P_1Eq*$". Το εμβαδόν αυτό δίδεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{q*} P_s(q)\,dq$$

Ας έλθουμε στη συνέχεια στη δεύτερη περιοχή. Το εμβαδόν της περιοχής αυτής μας δίνει το επιπλέον ποσό που εισέπραξαν οι παραγωγοί, δηλαδή το πλεόνασμα που πέτυχαν, επειδή πώλησαν το προϊόν τους σε υψηλότερη τιμή από εκείνες στις οποίες ήταν διατεθειμένοι να το πωλήσουν. Το εμβαδόν αυτό υπολογίζεται λύνοντας την παραπάνω ισότητα ως προς το P_1p*E"και αντικαθιστώντας στη συνέχεια τα ήδη γνωστά εμβαδά: "

$\left(P_1\text{p}*\text{E}\right) = \left(0\text{P}_1\text{Eq}*\right) - (0\text{p}*\text{Eq}*) = p*\cdot\ q* - \int_0^{q*} P_s(q)\,dq$

Έτσι γενικά έχουμε:

πλεόνασμα του Παραγωγού $PS = p*\cdot\ q* - \int_0^{q*} P_s(q)\,dq$

Ας εξετάσουμε τώρα το διάγραμμα του σχήματος 18 από τη μεριά των καταναλωτών. Στο σημείο ισορροπίας οι καταναλωτές πλήρωσαν μόνο το ποσό των $p*\cdot\ q*$ νομισματικών μονάδων, ενώ ήσαν διατεθειμένοι να πληρώσουν περισσότερα. Συγκεκριμένα η καμπύλη ζήτησης μας δίνει τις μέγιστες τιμές που οι καταναλωτές είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν προκειμένου να αποκτήσουν το προϊόν. Έτσι το εμβαδόν της περιοχής $0\text{P}_0\text{Eq}*$"ισούται αριθμητικά με το ποσό που θα κατέβαλαν οι καταναλωτές αν οι αγορές γίνονταν στις τιμές της καμπύλης. Εξετάζοντας με προσοχή την περιοχή $0\text{P}_0\text{Eq}*$" παρατηρούμε ότι αυτή απαρτίζεται από δύο μέρη, δηλαδή ότι:

$\left(0\text{P}_0\text{Eq}*\right) = (0\text{p}*\text{Eq}*) + \left(P_0\text{p}*\text{E}\right)$

Το εμβαδόν όμως του χωρίου $0\text{P}_0\text{Eq}*$"δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα "

$$\int_0^{q*} P_d(q)\,dq$$

ενώ το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $0\text{p}*\text{Eq}*$"ισούται με $p*\cdot\ q*$". Έτσι έχουμε:

$$\int_0^{q*} P_d(q)\,dq = p*\cdot\ q* + \left(P_0 p*E\right)$$

ή ισοδύναμα:

$$\left(P_0 p*E\right) = \int_0^{q*} P_d(q)\,dq - p*\cdot\ q*$$

Το εμβαδόν της περιοχής $P_0 p*E$ μας δίνει το πλεόνασμα που πέτυχαν οι καταναλωτές επειδή αγόρασαν το προϊόν που επιθυμούσαν, σε τιμή χαμηλότερη από εκείνες στις οποίες ήταν διατεθειμένοι να το αγοράσουν. Έτσι γενικά έχουμε:

πλεόνασμα του Καταναλωτή $CS = \int_0^{q*} P_d(q)\,dq - p*\cdot\ q*$

►Παράδειγμα 7.1. Να υπολογισθεί το πλεόνασμα καταναλωτή αν

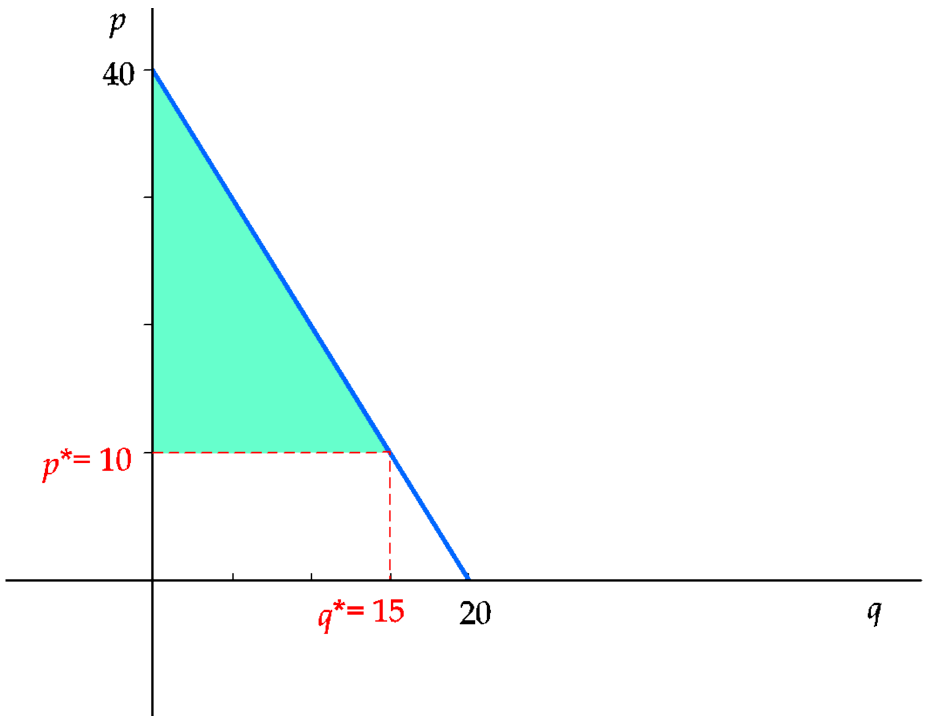
i. $P_d(q) = 40 - 2q$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p* = 10$ νομισματικές μονάδες.

ii. $P_d(q) = \frac{100}{q+2}$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p* = 20$ νομισματικές μονάδες.

iii. η συνάρτηση ζήτησης είναι $D(p) = \frac{50}{p^2}$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p* = 10$ νομισματικές μονάδες.

Λύση. **(i)** Θα απεικονίσουμε πρώτα τη συνάρτηση στο καρτεσιανό επίπεδο. Η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή. Αν θέσουμε στη συνάρτηση την τιμή $q = 0$, βρίσκουμε ότι η ευθεία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $P_d(0) = 40$. Στη συνέχεια θέτουμε $P_d(q) = 0$, για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα των τετμημένων. Λύνοντας την εξίσωση $40 - 2q = 0$ βρίσκουμε ότι $q = 20$.

Έχουμε συνεπώς το ακόλουθο διάγραμμα:



Σχήμα 19

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει, το πλεόνασμα του καταναλωτή ισούται με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου τριγώνου. Προκειμένου να βρούμε το εμβαδόν αυτό πρέπει να υπολογίσουμε τα μήκη των δυο καθέτων πλευρών του τριγώνου. Η κατακόρυφη πλευρά του τριγώνου είναι 40-10=30. Για να βρούμε την οριζόντια, θέτουμε $p *= 10$ στην εξίσωση της καμπύλης ζήτησης και βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή $q *$:

$$10 = 40 - 2q \Leftrightarrow 2q = 40 - 10 \Leftrightarrow q = \frac{30}{2} \Leftrightarrow q = 15$$

Οπότε, το εμβαδόν, σύμφωνα με τον γνωστό από τη γεωμετρία τύπο, είναι:

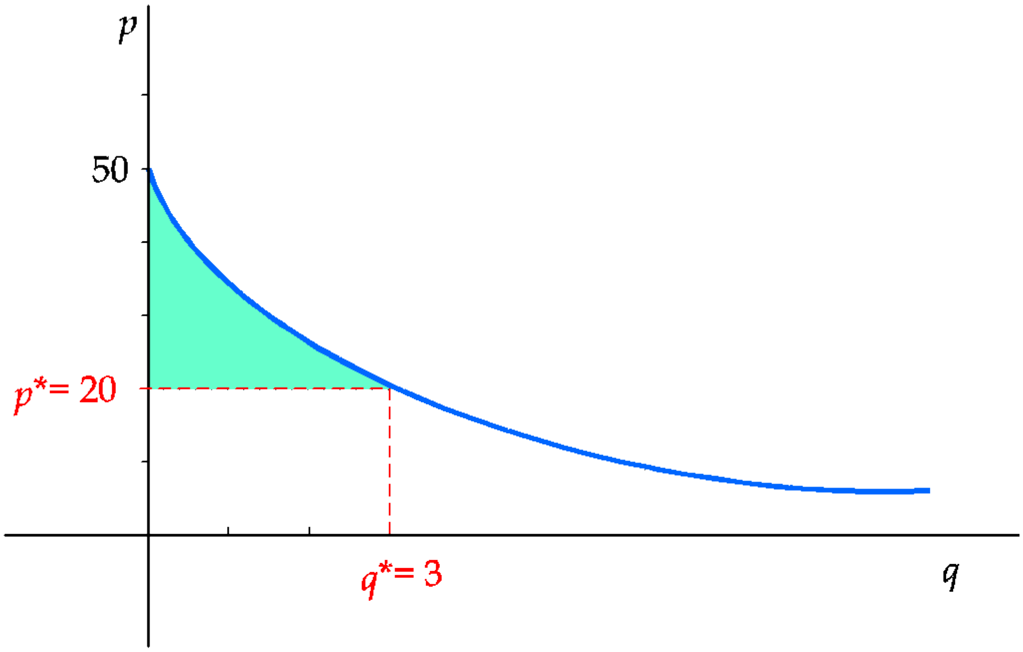
$$Εμβαδόν\ τριγώνου = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 = 225$$

Δηλαδή το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι $CS = 225$ νομισματικές μονάδες. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί επειδή έχουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός ευθυγράμμου σχήματος καθώς στην περίπτωση αυτή η ζήτηση είναι γραμμική. Φυσικά στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο υπολογισμού του πλεονάσματος καταναλωτή:

$$CS = \int_0^{q*} P_d(q)\, dq - p * \cdot\ q *= \int_0^{15} (40 - 2q)\, dq - 10 \cdot 15 =$$

$$= 40 \int_0^{15} dq - 2 \int_0^{15} q dq - 150 = 40\, q \Big|_0^{15} - 2 \frac{q^2}{2} \Big|_0^{15} - 150 = 40 \cdot 15 - 15^2 - 150 = 225$$

(ii) Αρχικά θα απεικονίσουμε τη συνάρτηση στο καρτεσιανό επίπεδο. Η καμπύλη της συνάρτησης είναι μια υπερβολή. Αν θέσουμε στη συνάρτηση την τιμή $q = 0$, βρίσκουμε ότι η υπερβολή τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $P_d(0) = 50$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη συνάρτηση ζήτησης την τιμή $p *= 20$ πώλησης του αγαθού στο σημείο



Σχήμα 20

ισορροπίας, για να βρούμε την αντίστοιχη τιμή $q *$ της ποσότητας ισορροπίας:

$$20 = \frac{100}{q+2} \Leftrightarrow 20q + 40 = 100 \Leftrightarrow q = \frac{60}{20} \Leftrightarrow q = 3$$

Έχουμε συνεπώς το διάγραμμα του σχήματος 20. Το πλεόνασμα του καταναλωτή ισούται με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. Επομένως:

$$CS = \int_0^{q*} P_d(q)\,dq - p *\cdot\ q *= \int_0^3 \frac{100}{q+2} dq - 20 \cdot 3 = 100 \int_0^3 \frac{1}{q+2} d(q+2) - 60 =$$

$$= 100 \ln(q+2)\Big|_0^3 - 60 = 100[\ln(3+2) - \ln(0+2)] - 60 = 100 \ln\frac{5}{2} - 60 =$$

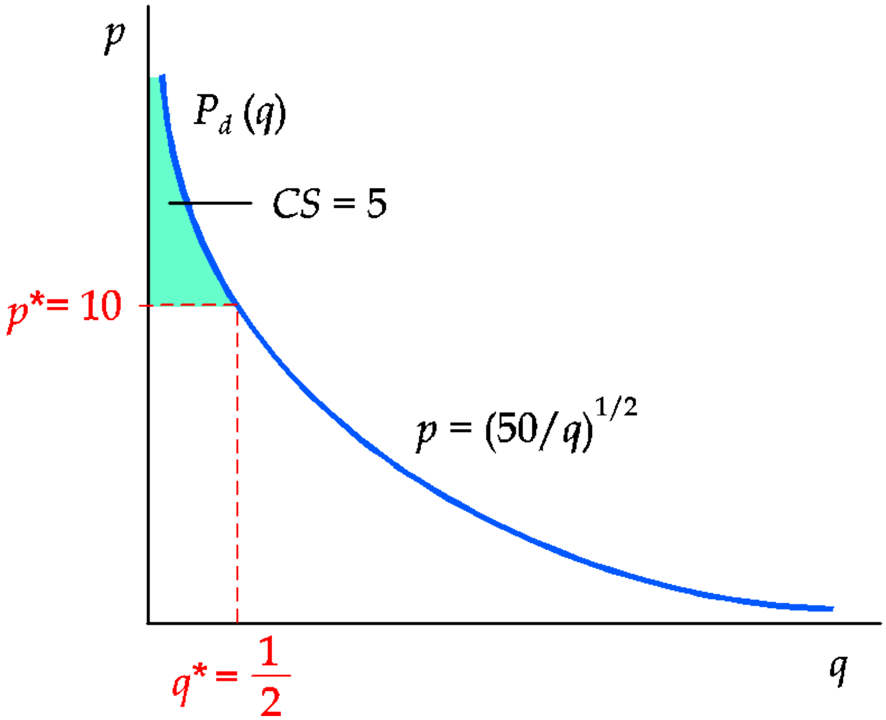
$$= 31{,}6291$$

Άρα το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι $CS = 31{,}6291$ νομισματικές μονάδες.

(iii) Στην περίπτωση αυτή μας δίδεται η συνάρτηση ζήτησης $D(p)$ και όχι η αντίστροφή της $P_d(q)$. Ας υπολογίσουμε λοιπόν την $P_d(q)$:

$$q = \frac{50}{p^2} \Leftrightarrow p^2 = \frac{50}{q} \Leftrightarrow p = \sqrt{\frac{50}{q}}$$

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση αυτή ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε απεικονίσει τη συνάρτηση αυτή.



Σχήμα 21

Το πλεόνασμα του καταναλωτή ισούται με το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής.
Η ζητούμενη ποσότητα στο σημείο ισορροπίας είναι:

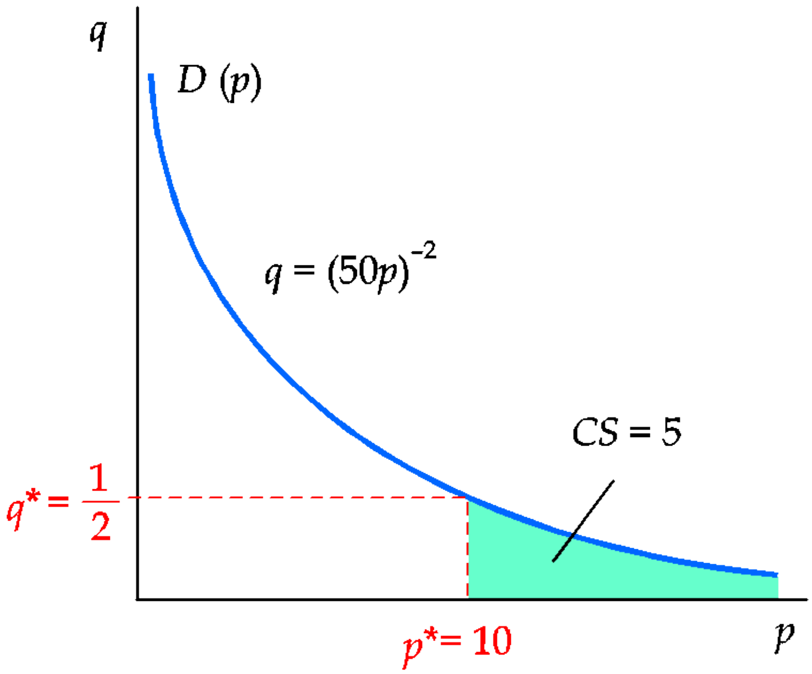
$$q = \frac{50}{10^2} \Leftrightarrow q = \frac{50}{100} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$CS = \int_0^{q*} P_d(q)\,dq - p*\cdot\ q* = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{50}{q}}\,dq - 10 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{50}\int_0^{1/2} q^{-\frac{1}{2}}\,dq - 5 =$$

$$= \sqrt{50}\,\frac{q^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{1/2} - 5 = 2\sqrt{50}\sqrt{\frac{1}{2}} - 5 = 2\sqrt{25} - 5 = 5$$

Άρα το πλεόνασμα καταναλωτή είναι $CS = 5$ νομισματικές μονάδες.
Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού του πλεονάσματος καταναλωτή είναι ο ακόλουθος.
Χαράσσουμε την καμπύλη της συνάρτησης $D(p) = \frac{50}{p^2}$.



Σχήμα 22

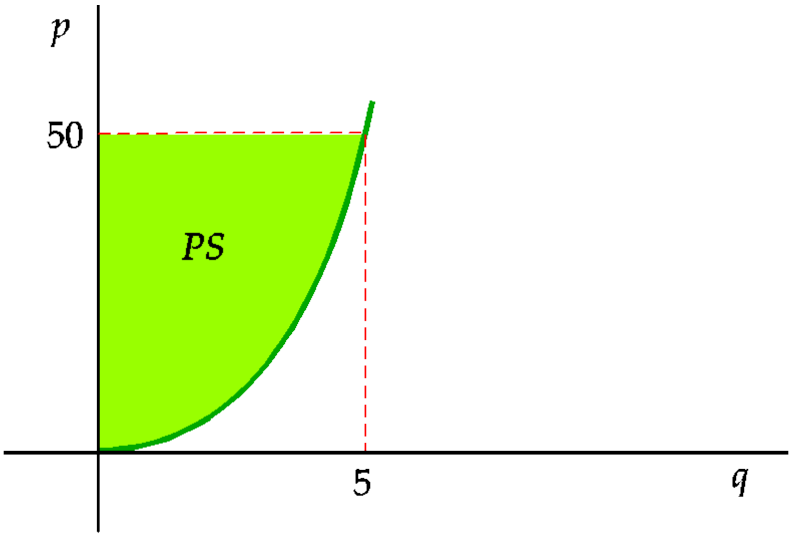
Τότε το πλεόνασμα καταναλωτή είναι ίσο με το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο παραπάνω σχήμα. Το εμβαδόν αυτό δίνεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{10}^{+\infty} D(p)\, dp$. Έτσι έχουμε:

$$CS = \int_{10}^{+\infty} 50p^{-2}\, dp = \lim_{b\to+\infty} \int_{10}^{b} 50p^{-2}\, dq = -50 \lim_{b\to+\infty} p^{-1}\Big|_{10}^{b} = -50\left[\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b} - \frac{1}{10}\right] =$$

$$= -50\left[0 - \frac{1}{10}\right] = \frac{50}{10} = 5 \quad ◄$$

►Παράδειγμα 7.2. Να υπολογισθεί το πλεόνασμα παραγωγού αν $P_s(q) = q^2 + 5q$ και αν στο σημείο ισορροπίας της αγοράς, η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p *= 50$ νομισματικές μονάδες.

Λύση. Η καμπύλη προσφοράς του αγαθού, που ορίζεται από τη συνάρτηση $P_s(q)$, είναι η παραβολή που απεικονίζεται στο σχήμα 23.



Σχήμα 23

Για τον υπολογισμό της ποσότητας ισορροπίας στην τιμή ισορροπίας $p* = 50$, έχουμε:

$50 = q^2 + 5q \Leftrightarrow q^2 + 5q - 50 = 0 \Leftrightarrow q_1 = 5,\ q_2 = -10$

Από τις δύο αυτές ρίζες δεκτή είναι μόνον η θετική, συνεπώς $q* = 5$. Επομένως για τον υπολογισμό του πλεονάσματος παραγωγού έχουμε:

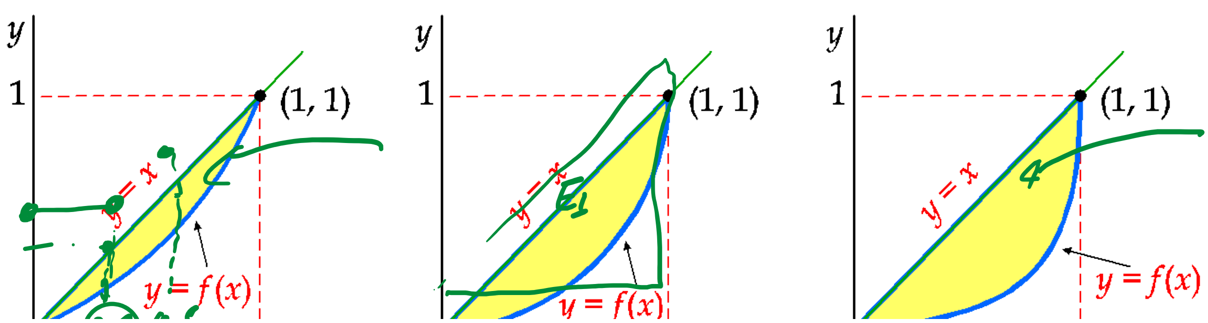
$$PS = p* \cdot q* - \int_0^{q*} P_s(q)\,dq = 50 \cdot 5 - \int_0^5 \left(q^2 + 5q\right) dq = 250 - \int_0^5 q^2\,dq - 5\int_0^5 q\,dq =$$

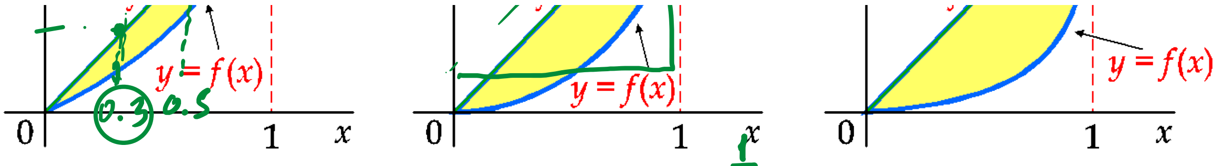
$$= 250 - \frac{q^3}{3}\Bigg|_0^5 - 5\frac{q^2}{2}\Bigg|_0^5 = 250 - \frac{5^3}{3} - 5\frac{5^2}{2} = 145{,}83 \quad ◀$$

8. Δείκτες άνισης κατανομής του εισοδήματος

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ολοκληρωμάτων είναι η μελέτη της συνάρτησης κατανομής του εθνικού εισοδήματος μεταξύ του πληθυσμού μιας χώρας. Όταν, για παράδειγμα, ένα μεγάλο ποσοστό του πληθυσμού λαμβάνει ένα μικρό ποσοστό του εθνικού εισοδήματος, έχουμε προφανώς μια ανισοκατανομή του πλούτου της χώρας.

Ο Αμερικάνος οικονομολόγος Max Otto Lorenz (1876-1959) εισήγαγε το 1905 μια καμπύλη, που φέρει το όνομά του, η οποία απεικονίζει το ποσοστό του συνολικού εισοδήματος κάθε ομάδας ενός πληθυσμού, ξεκινώντας από τη φτωχότερη και ανεβαίνοντας την κλίμακα κατανομής του εισοδήματος ως την πλουσιότερη ομάδα. Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται τρείς διαφορετικές τέτοιες καμπύλες.





(α) (β) (γ)

$E_1 = \int_0^1 x - f(x)\,dx$

Σχήμα 24

Ο άξονας των τεταγμένων δείχνει το ποσοστό του συνολικού εισοδήματος, ενώ ο άξονας των τετμημένων το ποσοστό του πληθυσμού. Η διαγώνιος αντιπροσωπεύει την τέλεια ισοκατανομή, καθώς το 20% του πληθυσμού λαμβάνει το 20% του συνολικού εισοδήματος, το 40% του πληθυσμού το 40% του εισοδήματος κοκ. Όσο περισσότερο απομακρύνεται η καμπύλη Lorenz από τη διαγώνιο, τόσο πιο άνισα κατανέμεται το εισόδημα.

Στη συνέχεια ο ιταλός Corrodo Gini (1884-1965) όρισε το 1912, τον **συντελεστή ανισο-κατανομής** του εθνικού εισοδήματος ως τον λόγο $\frac{E_1}{E_2}$, όπου E_1 είναι το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της διχοτόμου $y = x$ και της καμπύλης της συνάρτησης $y = f(x)$ και E_2 είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου που φράσσεται από τη διχοτόμο $y = x$, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = 1$. Εκ του ορισμού του συντελεστή ανισο-κατανομής προκύπτει ότι:

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_1}{1/2} = 2E_1 = 2\int_0^1 x - f(x)\,dx$

$$0 \leq \frac{E_1}{E_2} \leq 1$$

Όταν το εμβαδόν E_1 είναι μηδέν, η καμπύλη Lorenz συμπίπτει με τη διαγώνιο και ο συντελεστής Gini είναι επίσης μηδέν, γεγονός που υποδηλώνει τέλεια ισότητα στην κατανομή του εισοδήματος. Όσο ο συντελεστής Gini απομακρύνεται από το μηδέν και πλησιάζει προς το ένα, τόσο η ανισοκατανομή μεγαλώνει.

Επειδή το εμβαδόν E_1 της περιοχής μεταξύ της διχοτόμου $y = x$ και της καμπύλης της συνάρτησης $y = f(x)$ ισούται, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο XII, με $\int_0^1 \left[x - f(x)\right] dx$ και επειδή το εμβαδόν E_2 του ορθογωνίου τριγώνου ισούται με $\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, για τον συντελεστή Gini έχουμε:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_1}{1/2} = 2E_1 = 2\int_0^1 \left[x - f(x)\right] dx$$

▶Παράδειγμα 8.1. Η κατανομή του εισοδήματος μιας χώρας δίνεται από τη συνάρτηση

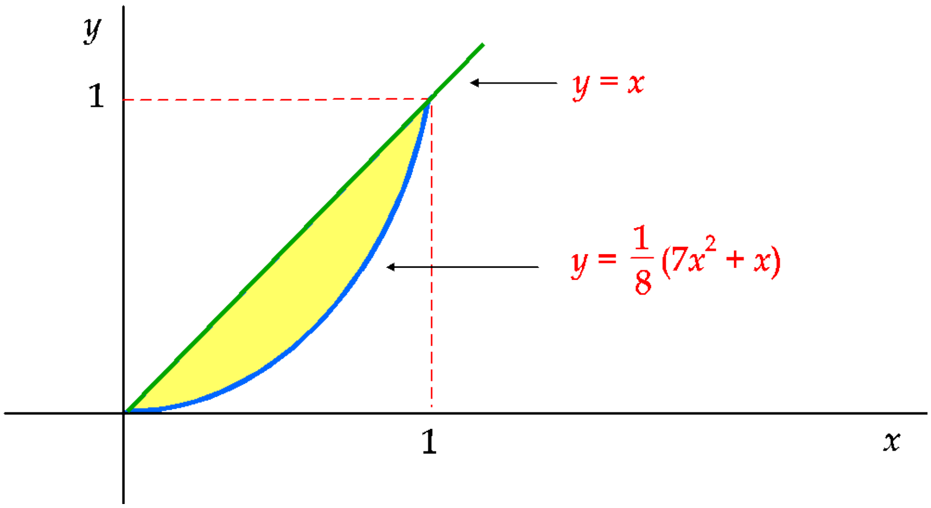
$$f(x) = \frac{1}{8}\left(7x^2 + x\right)$$

i. να κατασκευασθεί η καμπύλη Lorenz

ii. να βρεθεί ποιο ποσοστό του εθνικού εισοδήματος λαμβάνει το πιο χαμηλά αμειβόμενο 20% του πληθυσμού της χώρας

iii. να υπολογισθεί ο συντελεστής ανισοκατανομής Gini.

Λύση. **(i)** Η καμπύλη Lorenz του παραδείγματος είναι η παραβολή του σχήματος 25, η οποία



Σχήμα 25

έχει σχεδιασθεί σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο VII.

(ii) Για να βρούμε το ποσοστό του εθνικού εισοδήματος που λαμβάνει το χαμηλότερα αμειβόμενο 20% του πληθυσμού, θέτουμε στην $f(x)$ το x ίσο με 0,2 και έχουμε:

$$f(0{,}2) = \frac{1}{8}\left[7(0{,}2)^2 + 0{,}2\right] = 0{,}06$$

Επομένως το χαμηλότερα αμειβόμενο 20% του πληθυσμού λαμβάνει το 6% του εθνικού εισοδήματος.

(iii) Για να βρούμε τον συντελεστή ανισοκατανομής Gini πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$2\int_0^1 \left[x - \frac{1}{8}\left(7x^2 + x\right)\right] dx = 2\int_0^1 \left(\frac{7}{8}x - \frac{7}{8}x^2\right) dx = \frac{7}{4}\left(\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx\right) =$$

$$= \frac{7}{4}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right) = \frac{7}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{24}$$

Επομένως ο συντελεστής ανισοκατανομής Gini είναι $\frac{7}{24}$. ◀