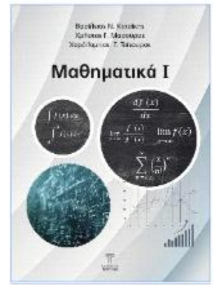
Εφαρμογές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού στις Οικονομικές Επιστήμες (ΣΥΝΕΧΕΙΑ) - Κεφάλαιο XIII

Ημερομηνία διάλεξης: 28-11-2024

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση,
Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3
Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Λυμένες Ασκήσεις Κεφαλαίου (Βιβλίο-Κεφάλαιο XIII) :

►Άσκηση 2. Η συνάρτηση οριακού κόστους $MC(q)$ για κάποιο προϊόν είναι της μορφής $MC(q) = a_2q^2 + a_1q + a_0$, όπου η μεταβλητή q συμβολίζει την παραγόμενη ποσότητα. Στο ξεκίνημα της παραγωγής το οριακό κόστος είναι ίσο με 150 νομισματικές μονάδες, ενώ για επίπεδα παραγωγής 10 και 20 μονάδων είναι 80 και 610 νομισματικές μονάδες αντίστοιχα. Το σταθερό κόστος παραγωγής είναι 200 νομισματικές μονάδες και η τιμή του προϊόντος 480 νομισματικές μονάδες.

i. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση του οριακού κόστους $MC(q)$, και να υπολογισθούν οι συναρτήσεις: συνολικού κόστους $TC(q)$, εσόδων $TR(q)$, και κερδών $\Pi(q)$.

ii. Να υπολογισθεί το επίπεδο παραγωγής το οποίο μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

Λύση. **(i)** Τα δεδομένα που έχουμε για το οριακό κόστος διαμορφώνουν το παρακάτω σύστημα:

$MC(0) = 150$
$MC(10) = 80$
$MC(20) = 610$

από το οποίο ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{array}{l} a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 150 \\ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = 80 \\ a_2 \cdot 20^2 + a_1 \cdot 20 + a_0 = 610 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_0 = 150 \\ 10a_2 + a_1 = -7 \\ 20a_2 + a_1 = 23 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_0 = 150 \\ a_1 = -37 \\ a_2 = 3 \end{array}$$

Επομένως:

$MC(q) = 3q^2 - 37q + 150$

Τώρα για τον υπολογισμό της συνάρτησης συνολικού κόστους έχουμε:

$$TC(q) = \int MC(q)dq = \int (3q^2 - 37q + 150)\,dq = 3\int q^2dq - 37\int qdq + 150\int dq =$$

$$= q^3 - 37\frac{q^2}{2} + 150q + c$$

Επειδή το σταθερό κόστος παραγωγής είναι 200 νομισματικές μονάδες έχουμε:

$$TC(0) = 200 \Leftrightarrow 0^3 - 37\cdot\frac{0^2}{2} + 150\cdot 0 + c = 200 \Leftrightarrow c = 200$$

Συνεπώς η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι η:

$$TC(q) = q^3 - 37\frac{q^2}{2} + 150q + 200$$

Επειδή τα συνολικά έσοδα TR μιας επιχείρησης είναι το γινόμενο της τιμής p στην οποία πωλεί το προϊόν της επί τον φυσικό όγκο q των πωλήσεών της, έχουμε:

$$TR(q) = p\cdot q = 480q$$

Τέλος, καθώς το κέρδος Π μιας επιχείρησης ορίζεται η διαφορά των ολικών εσόδων από το ολικό κόστος, έχουμε:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = 480q - \left(q^3 - 37\frac{q^2}{2} + 150q + 200\right)$$

$$= -q^3 + 37\frac{q^2}{2} + 330q - 200$$

(ii) Για να βρούμε ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής το οποίο μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης, θα εξετάσουμε πού μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $\Pi(q)$:

$$\Pi'(q) = \left(-q^3 + 37\frac{q^2}{2} + 330q - 200\right)' = -3q^2 + 37q + 330$$

Η $\Pi'(q)$ είναι τριώνυμο με ρίζες $q_1 = -6$ και $q_2 = \frac{55}{3}$. Εκτός των ριζών, δηλαδή στο $(-\infty,-6)\cup\left(\frac{55}{3},+\infty\right)$ το τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβαθμίου όρου, και επειδή αυτός είναι αρνητικός, έπεται ότι εκτός των ριζών η $\Pi'(q)$ είναι αρνητική, συνεπώς στην περιοχή $(-\infty,-6)\cup\left(\frac{55}{3},+\infty\right)$ η $\Pi(q)$ είναι φθίνουσα, ενώ εντός των ριζών η $\Pi'(q)$ είναι θετική, επομένως στο $\left(-6,\frac{55}{3}\right)$ η $\Pi(q)$ είναι αύξουσα. Άρα στο σημείο $q_2 = \frac{55}{3}$ η συνάρτηση $\Pi(q)$ παρουσιάζει μέγιστο. Συνεπώς το επίπεδο παραγωγής $q = \frac{55}{3}$ μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης. ◄

►Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση των ολικών εσόδων μιας επιχείρησης:
$TR(q) = -q^3 + 18q^2 - 60q$,
όπου q είναι η ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στην αγορά.

i. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q στην οποία η συνάρτηση των μέσων εσόδων έχει τοπικό ακρότατο. Στη συνέχεια να χαρακτηρισθεί το σημείο αυτό ως τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο και να βρεθεί η τιμή των ολικών(TR) και των μέσων εσόδων (AR) στο ακρότατο.

ii. Να υπολογιστεί η συνάρτηση οριακών εσόδων (MR) και να βρεθεί η τιμή της στο τοπικό ακρότατο του πρώτου ερωτήματος.

iii. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q για την οποία ισχύει $MR = AR$. Συγκρίνετε αυτή την ποσότητα με την ποσότητα προϊόντος για την οποία υπάρχει ακρότατο στο AR.

iv. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα μέσα έσοδα η ελαστικότητα των ολικών εσόδων ισούται με την μονάδα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

v. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα ολικά έσοδα η ελαστικότητα των μέσων εσόδων ισούται με μείον ένα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

Λύση. **(i)** Η συνάρτηση των μέσων εσόδων είναι:

$$AR(q) = \frac{TR(q)}{q} = \frac{-q^3 + 18q^2 - 60q}{q} = -q^2 + 18q - 60$$

Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο μηδενισμού της πρώτης της παραγώγου. Η πρώτη παράγωγος είναι:

$$AR'(q) = \left(-q^2 + 18q - 60\right)' = -2q + 18$$

Οπότε:

$$-2q + 18 = 0 \Leftrightarrow q = 9$$

Επειδή

$$-2q + 18 > 0 \Leftrightarrow q < 9$$

η πρώτη παράγωγος της $AR(q)$ είναι αύξουσα για τιμές μικρότερες του 9 και φθίνουσα για τιμές μεγαλύτερες του 9, επομένως στο 9 η$AR(q)$ παρουσιάζει μέγιστο. Στο σημείο αυτό τα ολικά έσοδα της επιχείρησης είναι:

$$TR(9) = -9^3 + 18 \cdot 9^2 - 60 \cdot 9 = 189$$

ενώ τα μέσα έσοδα είναι

$$AR(9) = \frac{TR(9)}{9} = \frac{189}{9} = 21$$

(ii) Η συνάρτηση των οριακών εσόδων $MR(q)$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης των συνολικών εσόδων:

$$MR(q) = \frac{dTR(q)}{dq} = \frac{d\left(-q^3 + 18q^2 - 60q\right)}{dq} = -3q^2 + 36q - 60$$

Η τιμή της $MR(q)$ στο 9, δηλαδή εκεί που η$AR(q)$ παρουσιάζει μέγιστο είναι

$$MR(9) = -3 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 60 = 21$$

Σημείωση: Η άσκηση επαληθεύει αριθμητικά το γνωστό αποτέλεσμα της οικονομικής θεωρίας της επιχείρησης ότι η καμπύλη των οριακών εσόδων τέμνει την καμπύλη των μέσων εσόδων εκεί όπου τα μέσα έσοδα μεγιστοποιούνται.

(iii) $MR(q) = AR(q) \Leftrightarrow -3q^2 + 36q - 60 = -q^2 + 18q - 60 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - 18q = 0 \Leftrightarrow q(2q - 18) = 0 \Leftrightarrow q = 0 \quad \text{ή} \quad q = 9$$

Η τιμή $q = 0$ δεν είναι αποδεκτή αφού για τον υπολογισμό της συνάρτησης AR έχουμε διαιρέσει με το q. Επομένως

$MR(9) = AR(9)$

Δηλαδή η τιμή της συνάρτησης των μέσων εσόδων είναι *ίση* με την τιμή της συνάρτησης των οριακών εσόδων στο τοπικό ακρότατο της πρώτης.

(iv) Η ελαστικότητα των ολικών εσόδων είναι

$$\varepsilon_{TR} = \frac{q}{TR(q)} TR'(q) = \frac{q}{-q^3 + 18q^2 - 60q}\left(-q^3 + 18q^2 - 60q\right)' =$$

$$= \frac{1}{-q^2 + 18q - 60}\left(-3q^2 + 36q - 60\right) = \frac{-3q^2 + 36q - 60}{-q^2 + 18q - 60}$$

Τα μέσα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν $q = 9$. Επομένως:

$$\frac{-3q^2 + 36q - 60}{-q^2 + 18q - 60} = \frac{-3 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 60}{-9^2 + 18 \cdot 9 - 60} = \frac{21}{21} = 1$$

Ερμηνεία ελαστικότητας: η ελαστικότητα έχει ερμηνεία ποσοστιαίας μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής σε μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά 1 ποσοστιαία μονάδα. Έτσι εδώ θα πούμε: στο επίπεδο πωλήσεων $q = 9$, εάν οι πωλήσεις αυξηθούν κατά 1%, τα συνολικά έσοδα θα αυξηθούν κατά 1%.

(v) Η ελαστικότητα των μέσων εσόδων είναι

$$\varepsilon_{AR} = \frac{q}{AR(q)} AR'(q) = \frac{q}{-q^2+18q-60}\left(-q^2 + 18q - 60\right)' =$$

$$= \frac{q}{-q^2 + 18q - 60}\left(-2q + 18\right) = \frac{-2q^2 + 18q}{-q^2 + 18q - 60}$$

Τα ολικά έσοδα έχουν τοπικά ακρότατα στα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης των οριακών εσόδων (η συνάρτηση οριακών εσόδων MR είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης ολικών εσόδων TR):

$$MR(q) = \frac{dTR(q)}{dq} = \frac{d\left(-q^3 + 18q^2 - 60q\right)}{dq} = -3q^2 + 36q - 60$$

και

$$-3q^2 + 36q - 60 = 0 \Leftrightarrow q_1 = 2,\ q_2 = 10$$

Με βάση το πρόσημο της 2ης παραγώγου της συνάρτησης ολικών εσόδων

$$\frac{d^2TR(q)}{dq^2} = \frac{d\left(-3q^2 + 36q - 60\right)}{dq} = -6q + 36$$

στα τοπικά ακρότατα έχουμε:

α) για $q = q_1 = 2$: $\quad -6q_1 + 36 = -6 \cdot 2 + 36 = 24 > 0$

επομένως το $q_1 = 2$ είναι τοπικό ελάχιστο.

β) για $q = q_2 = 10$: $\quad -6q_2 + 36 = -6 \cdot 10 + 36 = -24 < 0$

επομένως το $q_2 = 10$ είναι τοπικό μέγιστο.

Η ελαστικότητα των μέσων εσόδων στο 10 είναι

$$\frac{-2 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10}{-10^2 + 18 \cdot 10 - 60} = \frac{-20}{20} = -1$$

Ερμηνεία ελαστικότητας: η ελαστικότητα έχει ερμηνεία ποσοστιαίας μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής σε μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά 1 ποσοστιαία μονάδα. Έτσι εδώ θα πούμε: στο επίπεδο πωλήσεων $q = 10$, εάν οι πωλήσεις αυξηθούν κατά 1%, τα μέσα έσοδα (έσοδα ανά μονάδα προϊόντος) θα μειωθούν κατά 1%. ◄

Ημερομηνία διάλεξης: 05-12-2024

►**Άσκηση 4.** Η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι $q + 2p = 40$, όπου q η ζητούμενη ποσότητα και p η τιμή του προϊόντος, ενώ η συνάρτηση του μέσου κόστους του, είναι $AC = 20q^{-1} + 4$.

i. Προσδιορίστε την τιμή της q για την οποία μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

ii. Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

iii. Υποθέστε ότι η κυβέρνηση επιβάλει έναν εφάπαξ φόρο $t = 48$ νομισματικών μονάδων. Πώς επηρεάζεται η καμπύλη των κερδών;

iv. Υποθέστε ότι η κυβέρνηση επιβάλλει έναν φόρο ύψους t νομισματικών μονάδων ανά μονάδα πωλουμένης ποσότητας. Να υπολογισθεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη μετά την επιβολή φόρου. Επίσης να υπολογισθεί η τιμή που πρέπει να λάβει ο t ώστε η κυβέρνηση να εισπράξει τα μέγιστα φορολογικά έσοδα από τη συγκεκριμένη φορολογία. Πόσα θα είναι τα έσοδα αυτά;

Λύση. **(i)** $q + 2p = 40$ επομένως $p = 20 - \frac{1}{2}q$. Άρα τα συνολικά έσοδα θα είναι:

$$TR(q) = p \cdot q = 20q - \frac{1}{2}q^2$$

Η συνάρτηση του μέσου κόστους είναι το πηλίκο του συνολικού κόστους διά της ποσότητας, δηλαδή $AC(q) = \frac{TC(q)}{q}$. Επομένως

$$TC(q) = q \cdot AC = q(20q^{-1} + 4) = 20 + 4q$$

Συνεπώς για τη συνάρτηση των κερδών έχουμε:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) \Leftrightarrow \Pi(q) = 20q - \frac{1}{2}q^2 - 20 - 4q \Leftrightarrow \Pi(q) = -\frac{1}{2}q^2 + 16q - 20$$

Τα κέρδη λαμβάνουν ακρότατη τιμή στο σημείο μηδενισμού της πρώτης παραγώγου. Η πρώτη παράγωγος είναι:

$$\Pi'(q) = \left(-\frac{1}{2}q^2 + 16q - 20\right)' = -q + 16$$

Επομένως

$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow -q + 16 = 0 \Leftrightarrow q = 16$
Επειδή $\Pi''(q) = -1 < 0$, έπεται ότι τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν $q = 16$. Το μέγιστο κέρδος είναι $\Pi(16) = 108$.

(ii) $q + 2p = 40$ επομένως $q = 40 - 2p$. Συνεπώς για την ελαστικότητα έχουμε:

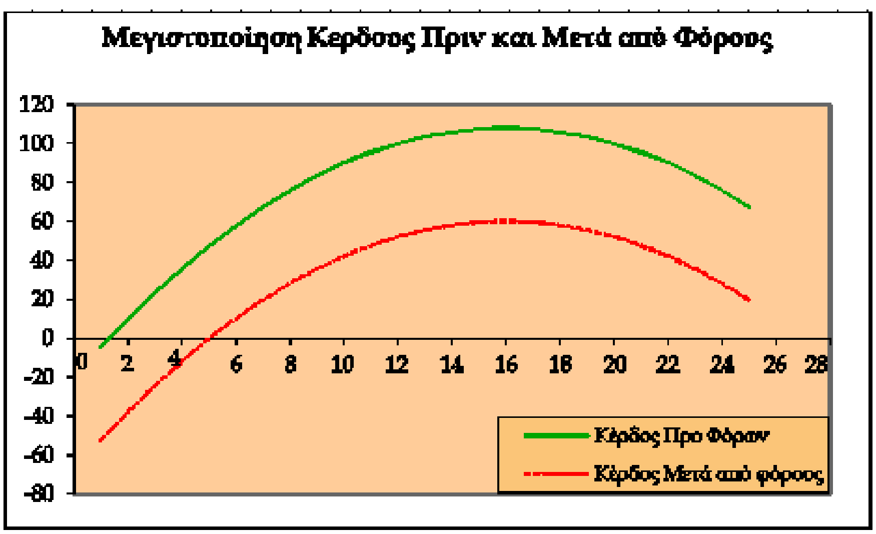
$$\varepsilon = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{40-2p}(40-2p)' = \frac{-2p}{40-2p}$$

Αφού $q = 16$, στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη η τιμή είναι
$p = 20 - \frac{1}{2}q = 20 - \frac{1}{2}16 = 12$.
Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του p στον τύπο της ελαστικότητας έχουμε ότι $\varepsilon = -1{,}5$.

(iii) Αν υποθέσουμε ότι η κυβέρνηση επιβάλει έναν εφάπαξ φόρο $t = 48$ ν.μ. τότε αυτός θα αυξήσει το συνολικό κόστος του προϊόντος κατά το ποσό του φόρου, επομένως το κέρδος θα μειωθεί κατά 48 ν.μ., δηλαδή

$$\Pi_*(q) = \left(-\frac{1}{2}q^2 + 16q - 20\right) - 48 = -\frac{1}{2}q^2 + 16q - 68.$$

Η παράγωγος όμως παραμένει αμετάβλητη, ήτοι
$\Pi'_*(q) = \Pi'(q) = -q + 16$
Δηλαδή το σημείο στο οποίο μεγιστοποιούνται τα κέρδη θα παραμείνει το 16 αλλά το ύψος των κερδών θα μειωθεί.



Σχήμα 26

Βλέπουμε στο παραπάνω διάγραμμα ότι η γραφική συνάρτηση των κερδών μετά την επιβολή του φόρου μετατοπίζεται παράλληλα προς τα κάτω. Αυτό δείχνει ότι τα κέρδη μετά την επιβολή του φόρου μειώνονται, αλλά μεγιστοποιούνται στο ίδιο επίπεδο πωλήσεων όπως και στην περίπτωση προ της επιβολής του φόρου. Δηλαδή, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, αμφότερες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν μέγιστο στο ίδιο επίπεδο ζητουμένης ποσότητας ($q = 16$).

(iv) Η συνάρτηση κόστους $TC(q) = 20 + 4q$ θα μεταβληθεί με την επιβολή της φορολογίας και θα λάβει τη μορφή

$TC(q) = 20 + 4q + tq$

Αντίστοιχα θα επηρεαστεί και η συνάρτηση $\Pi(q) = -\frac{1}{2}q^2 + 16q - 20$ των κερδών και θα λάβει τη μορφή:

$$\Pi(q) = \left(-\frac{1}{2}q^2 + 16q - 20\right) - tq = -\frac{1}{2}q^2 + (16 - t)q - 20$$

Προκειμένου να βρούμε πού μεγιστοποιούνται τα κέρδη βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο:

$$\Pi'(q) = \left[-\frac{1}{2}q^2 + (16 - t)q - 20\right]' = -q + 16 - t$$

και εξετάζουμε που μηδενίζεται

$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow -q + 16 - t = 0 \Leftrightarrow q = 16 - t$

Επειδή $\Pi''(q) = -1 < 0$, έπεται ότι τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν $q = 16 - t$.

Με την επιβολή του φόρου, τα συνολικά φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης (GR, government revenue) από το προϊόν αυτό είναι:

$GR = tq$

Επομένως τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης, όταν μεγιστοποιούνται τα κέρδη της επιχείρησης είναι:

$GR(t) = t(16 - t)$

ή ισοδύναμα:

$GR(t) = 16t - t^2$

Δεδομένου ότι και η κυβέρνηση θέλει να μεγιστοποιήσει τα φορολογικά της έσοδα, θα πρέπει να εξετάσουμε που η συνάρτηση $GR(t) = 16t - t^2$ παρουσιάζει μέγιστο.

Η πρώτη παράγωγος είναι:

$GR'(t) = \left(16t - t^2\right)' = 16 - 2t$

και μηδενίζεται όταν $t = 8$. Επειδή για τη δεύτερη παράγωγο ισχύει:

$GR''(t) = -2 < 0$

έπεται ότι το $t = 8$ αποτελεί μέγιστο για τη συνάρτηση GR και συνεπώς τα φορολογικά έσοδα μεγιστοποιούνται για την τιμή αυτή του t. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του φόρου ανά μονάδα παραγόμενης ποσότητας, στη συνάρτηση $q = 16 - t$, που προσδιορίσαμε παραπάνω, θα έχουμε ότι $q = 8$ που είναι ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη μετά την επιβολή φόρου. Επομένως τα μέγιστα φορολογικά έσοδα που μπορεί να εισπράξει η κυβέρνηση είναι $GR = 8 \cdot 8 = 64$ν.μ. ◄

►Άσκηση 5. Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα αγαθό εκφράζονται από τις σχέσεις:

$q = (10 + p)(3 + 0{,}3p)$ και $q = 2(10 - p)(3{,}5 + 0{,}35p)$

i. Να βρείτε ποια από τις δύο συναρτήσεις είναι η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού και ποια η συνάρτηση προσφοράς του.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή και την ποσότητα ισορροπίας.

iii. Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης και προσφοράς στο σημείο ισορροπίας.

Λύση. **(i)** Όπως έχουμε αναφέρει η συνάρτηση της ζήτησης είναι εν γένει μια φθίνουσα συνάρτηση, ενώ η συνάρτηση της προσφοράς είναι εν γένει μια αύξουσα συνάρτηση. Θα μελετήσουμε λοιπόν την μονοτονία της πρώτης παραγώγου των συναρτήσεων αυτών:

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d(10+p)(3+0{,}3p)}{dp} = \frac{d(0{,}3p^2+6p+30)}{dp} = 0{,}6p + 6$$

και

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d[2(10-p)(3{,}5+0{,}35p)]}{dp} = \frac{d(70-0{,}7p^2)}{dp} = -1{,}4p$$

Ως μαθηματικές συναρτήσεις, η συνάρτηση ζήτησης και προσφοράς μπορεί να ορίζονται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ως συναρτήσεις όμως οι οποίες πρέπει να έχουν οικονομικό νόημα καθώς εκφράζουν τις σχέσεις μεταξύ της τιμής ενός αγαθού και της αντίστοιχης ζητούμενης ή προσφερόμενης ποσότητάς του, θα πρέπει να ικανοποιούν τους περιορισμούς:

$p \geq 0$ και $q \geq 0$

Επομένως, επειδή $p \geq 0$, έχουμε:

$0{,}6p + 6 \geq 0$ και $-1{,}4p \leq 0$

Συνεπώς, η πρώτη από τις συναρτήσεις που εδόθησαν είναι αύξουσα, και η δεύτερη είναι φθίνουσα. Άρα η συνάρτηση:

$q_s = (10+p)(3+0{,}3p) = 0{,}3p^2 + 6p + 30$

είναι η συνάρτηση προσφοράς του αγαθού, ενώ η συνάρτηση:

$q_d = 2(10-p)(3{,}5+0{,}35p) = 70 - 0{,}7p^2$

είναι η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού.

(ii) Για να υπάρχει ισορροπία στην αγορά θα πρέπει

$q_s = q_d$

απ' όπου ισοδύναμα έχουμε:

$$0{,}3p^2 + 6p + 30 = 70 - 0{,}7p^2 \Leftrightarrow p^2 + 6p - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = -10 \\ p_2 = 4 \end{cases}$$

Η αρνητική ρίζα $p_1 = -10$, λόγω των περιορισμών που προαναφέραμε, απορρίπτεται και έτσι δεκτή γίνεται μόνον η θετική $p_2 = 4$. Αν στη συνέχεια θέσουμε την τιμή αυτή στη συνάρτηση της ζήτησης ή στη συνάρτηση της προσφοράς θα λάβουμε την ποσότητα ισορροπίας:

$q = 70 - 0{,}7 \cdot 4^2 = 58{,}8$

(iii) Η ελαστικότητα της ζήτησης δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon_d = \frac{dq_d}{dp} \cdot \frac{p}{q_d}$$

Επομένως έχουμε:

$$\varepsilon_d = \frac{dq_d}{dp} \cdot \frac{p}{q_d} = \frac{d\left(70 - 0{,}7p^2\right)}{dp} \cdot \frac{p}{70 - 0{,}7p^2} = \frac{-1{,}4p \cdot p}{70 - 0{,}7p^2} = \frac{-1{,}4p^2}{70 - 0{,}7p^2}$$

Συνεπώς στο σημείο ισορροπίας η ελαστικότητα της ζήτησης είναι:

$$\varepsilon_d = \frac{-1{,}4 \cdot 4^2}{70 - 0{,}7 \cdot 4^2} = \frac{-22{,}4}{58{,}8} \approx -0{,}381$$

Η ελαστικότητα της προσφοράς δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon_s = \frac{dq_s}{dp} \cdot \frac{p}{q_s}$$

Επομένως έχουμε:

$$\varepsilon_s = \frac{dq_s}{dp} \cdot \frac{p}{q_s} = \frac{d\left(0{,}3p^2 + 6p + 30\right)}{dp} \cdot \frac{p}{0{,}3p^2 + 6p + 30} = \frac{\left(0{,}6p + 6\right) \cdot p}{0{,}3p^2 + 6p + 30} =$$

$$= \frac{0{,}6p^2 + 6p}{0{,}3p^2 + 6p + 30}$$

Συνεπώς στο σημείο ισορροπίας η ελαστικότητα της προσφοράς είναι:

$$\varepsilon_s = \frac{0{,}6 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4}{0{,}3 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 + 30} = \frac{33{,}6}{58{,}8} \approx 0{,}571$$ ◄

►**Άσκηση 6.** Οι συναρτήσεις οριακού κόστους και οριακών εσόδων μιας επιχείρησης είναι:

$MC\left(q\right) = 20 + 12q(q^2 + 2)^2$ και $MR\left(q\right) = 2q^{-2} + 3q^{-1}$

αντίστοιχα, όπου $q \neq 0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι, όταν η επιχείρηση παράγει 3 μονάδες προϊόντος, το συνολικό κόστος παραγωγής ανέρχεται στις 2760 νομισματικές μονάδες, ενώ όταν η επιχείρηση πουλάει μια μονάδα προϊόντος τα συνολικά έσοδα ανέρχονται σε 10 νομισματικές μονάδες. Ζητούνται:

i. η συνάρτηση συνολικού και μέσου κόστους,

ii. η συνάρτηση συνολικών εσόδων,

iii. η συνάρτηση $P\left(q\right)$ της συγκεκριμένης επιχείρησης.

iv. αν η συνάρτηση οριακού εσόδου μιας επιχείρησης εξαρτάται από τον χρόνο και είναι $MR(t) = (t - 1)^2$ βρείτε τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης κατά τα 5 πρώτα έτη λειτουργίας της.

Λύση. **(i)** Το οριακό κόστος σε ανηγμένη μορφή είναι:

$$MC\left(q\right) = 20 + 12q(q^2 + 2)^2 = 20 + 12q(q^4 + 4q^2 + 4)$$
$$= 12q^5 + 48q^3 + 48q + 20$$

Το συνολικό κόστος προκύπτει από την ολοκλήρωση της συνάρτησης του οριακού κόστους:

$$TC(q) = \int MC(q)dq = \int (12q^5 + 48q^3 + 48q + 20)dq =$$

$$= 12\int q^5 dq + 48\int q^3\, dq + 48\int q\, dq + 20\int dq = 12\frac{q^6}{6} + 48\frac{q^4}{4} + 48\frac{q^2}{2} + 20q + c =$$

$$= 2q^6 + 12q^4 + 24q^2 + 20q + c$$

Για $q = 3$ το συνολικό κόστος παραγωγής ανέρχεται στις 2760 νομισματικές μονάδες, επομένως για τον προσδιορισμό της τιμής της σταθεράς c έχουμε:

$$2760 = 2 \cdot 3^6 + 12 \cdot 3^4 + 24 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2760 = 1458 + 972 + 216 + 60 + c \Leftrightarrow c = 54$$

Άρα η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι η ακόλουθη:

$$TC(q) = 2q^6 + 12q^4 + 24q^2 + 20q + 54$$

και επομένως η συνάρτηση μέσου κόστους έχει τη μορφή:

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = 2q^5 + 12q^3 + 24q + 20 + \frac{54}{q}$$

(ii) Τα συνολικά έσοδα προκύπτουν από την ολοκλήρωση της συνάρτησης οριακών εσόδων

$$TR(q) = \int MR(q)dq = \int (2q^{-2} + 3q^{-1})\, dq = 2\int q^{-2}dq + 3\int \frac{1}{q}dq =$$

$$= 2\frac{q^{-2+1}}{-2+1} + 3\, ln\, q + c = -2 \cdot q^{-1} + 3\, ln\, q + c$$

Όταν η επιχείρηση πουλάει μια μονάδα προϊόντος τα συνολικά έσοδα ανέρχονται σε 10 νομισματικές μονάδες, επομένως:

$$TR(1) = 10 \Leftrightarrow -2 \cdot 1^{-1} + 3\, ln\, 1 + c = 10 \Leftrightarrow -2 + 0 + c = 10 \Leftrightarrow c = 12$$

Άρα η συνάρτηση συνολικών εσόδων είναι η ακόλουθη

$$TR(q) = -2q^{-1} + 3\, ln\, q + 12$$

(iii) Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων $TR(q)$ είναι:

$$TR(q) = q \cdot P(q)$$

όπου $P(q)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης ζήτησης $D(p)$ του προϊόντος.

Επομένως:

$$P(q) = \frac{TR(q)}{q} = \frac{-2q^{-1} + 3\, ln\, q + 12}{q} = \frac{3\, ln\, q + 12}{q} - \frac{2}{q^2}$$

(iv) Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση οριακών εσόδων ως προς τον χρόνο t από $t = 0$ έως $t = 5$ και έχουμε:

$$\int_0^5 MR(t)dt = \int_0^5 (t-1)^2 dt = \int_0^5 (t-1)^2 d(t-1) = \left.\frac{(t-1)^3}{3}\right|_0^5 = \frac{(5-1)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{65}{3}$$

Επομένως τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης κατά τα 5 πρώτα έτη λειτουργίας της είναι $\frac{65}{3}$ νομισματικές μονάδες. ◄

►Άσκηση 7. Αν η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι

$$MC(q) = -\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4}$$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους έχει ελάχιστη τιμή 35 νομισματικών μονάδων, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης.

Λύση. Η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης του οριακού κόστους. Έχουμε λοιπόν:

$$TC(q) = \int MC\,(q)dq = \int (-\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4})\,dq = \int -\frac{100}{q^2}dq + \int \frac{1}{4}dq = \frac{100}{q} + \frac{q}{4} + c$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $TC(q)$ είναι το $\mathbb{R} - \{0\}$, όμως η $TC(q)$ έχει οικονομικό νόημα μόνον στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή στο διάστημα $(0, +\infty)$. Για να βρούμε την τιμή της σταθεράς c πρέπει να προσδιορίσουμε την τιμή q_o στην οποία η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια να επιλύσουμε την εξίσωση:

$$TC(q_o) = 35$$

Εξετάζουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της $TC(q)$, η οποία είναι η $MC(q)$ και που αυτή μηδενίζεται:

$$MC(q) > 0 \Leftrightarrow -\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{-400 + q^2}{4q^2} > 0 \Leftrightarrow q^2 - 400 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $q^2 - 400$ είναι οι $q_1 = -20$ και $q_2 = 20$. Επομένως

q $-\infty$	-20	20	$+\infty$
$MC(q)$	+	-	+
$TC(q)$	↗	↘	↗

Συνεπώς η $TC(q)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν $q = 20$, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, +\infty)$. Έχουμε λοιπόν:

$$TC(20) = 35 \Leftrightarrow \frac{100}{20} + \frac{20}{4} + c = 35 \Leftrightarrow 5 + 5 + c = 35 \Leftrightarrow c = 25$$

Άρα η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης είναι η:

$$TC(q) = \frac{100}{q} + \frac{q}{4} + 25$$ ◄

►**Άσκηση 8.** Δίνονται οι συναρτήσεις ζήτησης $D(p)$ και προσφοράς $S(p)$ ενός προϊόντος ως προς την τιμή p της μιας μονάδας:

$q_d = D(p) = 140 - 2p$ και $q_s = S(p) = 4p + 20$

i. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση συνολικού κόστους, αν το συνολικό κόστος παραγωγής q μονάδων, $TC(q)$, δίνεται από ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο ως προς q και γνωρίζουμε ότι:

- **α.** το σταθερό συνολικό κόστος ισούται με 90 νομισματικές μονάδες
- **β.** το κέρδος, δηλαδή η διαφορά των συνολικών εσόδων από το συνολικό κόστος, μεγιστοποιείται στην τιμή ισορροπίας και
- **γ.** το οριακό κόστος για παραγόμενη ποσότητα που αντιστοιχεί στο ήμισυ της τιμής ισορροπίας ισούται με 7 νομισματικές μονάδες.

ii. Να βρεθεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα. Να υπολογισθούν τα μέγιστα συνολικά έσοδα.

iii. Να βρεθεί η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος. Να υπολογισθεί το ελάχιστο μέσο κόστος.

Λύση. **(i)** Έστω ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι η $TC(q) = aq^2 + bq + c$. Θα πρέπει να προσδιορισθούν οι συντελεστές a, b, c. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $TC(0) = 90$, άρα $c = 90$. Τα συνολικά έσοδα για μία δεδομένη τιμή πώλησης p ισούνται με $TR = p \cdot q_d$ ενώ το συνολικό κόστος για την ίδια τιμή πώλησης είναι $TC(q_s)$. Επομένως, το κέρδος συναρτήσει της τιμής πώλησης είναι:

$$\Pi = p \cdot q_d - TC(q_s) \Leftrightarrow \Pi = p(140 - 2p) - a(4p + 20)^2 - b(4p + 20) - 90$$

Η πρώτη παράγωγος είναι:

$$\Pi' = \left[p(140 - 2p) - a(4p + 20)^2 - b(4p + 20) - 90\right]' \Leftrightarrow$$

$$\Pi' = 140 - 4p - 8a(4p + 20) - 4b$$

Στην τιμή ισορροπίας η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού, δηλαδή η τιμή ισορροπίας καθορίζεται από τη σχέση:

$$q_d = q_s \Rightarrow 140 - 2p = 4p + 20$$

απ' όπου προκύπτει ότι $p = 20$. Σύμφωνα με τις υποθέσεις της άσκησης, το κέρδος μεγιστοποιείται στην τιμή ισορροπίας, δηλαδή το μέγιστο κέρδος είναι το $\Pi(20)$. Επειδή το $\Pi(20)$ είναι μέγιστο θα ισχύει $\Pi'(20) = 0$, απ' όπου ισοδύναμα έχουμε:

$$140 - 4 \cdot 20 - 8a(4 \cdot 20 + 20) - 4b = 0 \Leftrightarrow 200a + b = 15$$

Επιπλέον από την υπόθεση της άσκησης το οριακό κόστος για παραγόμενη ποσότητα που αντιστοιχεί στο ήμισυ της τιμής ισορροπίας, ισούται με 7 νομισματικές μονάδες. Το οριακό κόστος είναι:

$TC' = \left(aq^2 + bq + c\right)' \Leftrightarrow MC = 2aq + b \Leftrightarrow MC = 2a\left(4p + 20\right) + b$

Επομένως:

$MC(10) = 7 \Leftrightarrow 2a(4 \cdot 10 + 20) + b = 7 \Leftrightarrow 120a + b = 7$

Έχουμε συνεπώς το σύστημα:

$200a + b = 15$

$120a + b = 7$

απ' όπου $a = 0{,}1$ και $b = -5$. Άρα η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι η

$TC(q) = 0{,}1q^2 - 5q + 90$

(ii) Τα συνολικά έσοδα για μία δεδομένη τιμή πώλησης p ισούνται με $TR = p \cdot q_d$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $q_d = 140 - 2p$ επομένως $p = 70 - 0{,}5q_d$. Άρα

$TR = p \cdot q_d \Leftrightarrow TR = \left(70 - 0{,}5q_d\right) \cdot q_d \Leftrightarrow TR = -0{,}5{q_d}^2 + 70q_d$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο

$TR' = \left(-0{,}5{q_d}^2 + 70q_d\right)' = -q_d + 70$

Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στο 70 και $TR' > 0$ όταν $q_d < 70$. Επομένως:

q $-\infty$	70	$+\infty$
TR'	+	-
TR	↗	↘

Άρα τα συνολικά έσοδα γίνονται μέγιστα για ποσότητα $q_d = 70$. Τα μέγιστα συνολικά έσοδα είναι:

$TR(70) = -0{,}5 \cdot 70^2 + 70 \cdot 70 = 2.450$

(iii) Το μέσο κόστος AC δίνεται από τη σχέση:

$$AC = \frac{TC}{q} \Leftrightarrow AC = \frac{0{,}1 \cdot q^2 - 5q + 90}{q} \Leftrightarrow AC = 0{,}1 \cdot q + \frac{90}{q} - 5$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $AC(q)$ είναι το $\mathbb{R} - \{0\}$, όμως η $AC(q)$ έχει οικονομικό νόημα μόνον στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή στο διάστημα $(0, +\infty)$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια την πρώτη παράγωγο της AC:

$$AC' = \left(0{,}1 \cdot q + \frac{90}{q} - 5\right)' = 0{,}1 - \frac{90}{q^2}$$

Εξετάζουμε το πρόσημο της AC' και που αυτή μηδενίζεται:

$$AC' > 0 \Leftrightarrow 0{,}1 - \frac{90}{q^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{0{,}1 \cdot q^2 - 90}{q^2} > 0 \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot q^2 - 90 > 0 \Leftrightarrow q^2 - 900 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $q^2 - 900$ είναι οι $q_1 = -30$ και $q_2 = 30$. Επομένως για την μονοτονία της $AC(q)$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

q $-\infty$	-30	30	$+\infty$
$AC'(q)$	+	–	+
$AC(q)$	↗	↘	↗

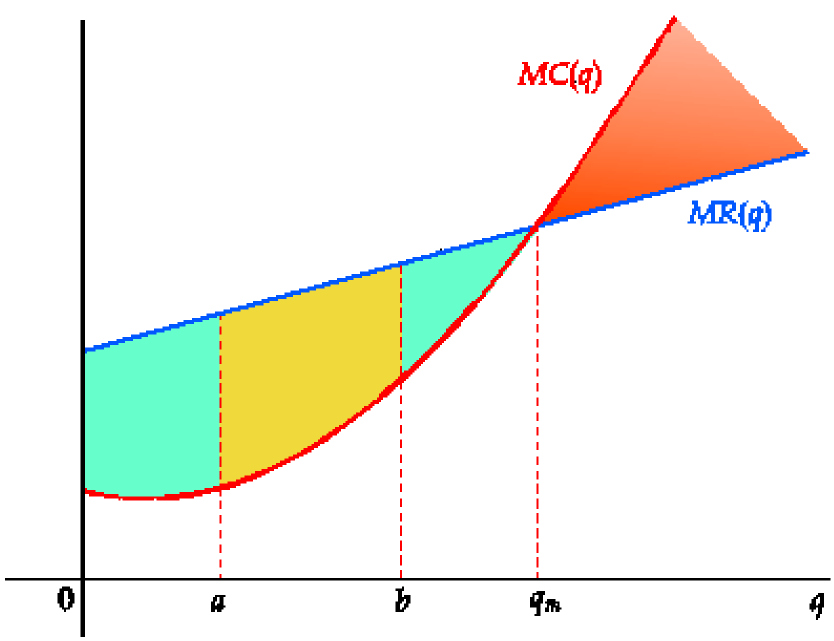
Έτσι η συνάρτηση $AC(q)$ είναι φθίνουσα στο (0,30) και αύξουσα στο $(30, +\infty)$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 30. Συνεπώς η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος είναι η $q = 30$. Το δε ελάχιστο μέσο κόστος είναι:

$AC(30) = 0{,}1 \cdot 30 + \frac{90}{30} - 5 = 28$ ◄

►**Άσκηση 9.** Οι συναρτήσεις των οριακών εσόδων $MR(q)$ και του οριακού κόστους $MC(q)$ του προϊόντος μιας επιχείρησης είναι σχεδιασμένες στο παρακάτω διάγραμμα. Η επιχείρηση επιθυμεί να γνωρίζει

i. το συνολικό κέρδος της, αν η παραγωγή του προϊόντος μεταβληθεί από την ποσότητα $q = a$ στην ποσότητα $q = b$

ii. για ποια τιμή του q μεγιστοποιείται το κέρδος της.



Λύση. **(i)** Το κέρδος $\Pi(q)$ της επιχείρησης είναι η διαφορά των ολικών εσόδων από το ολικό κόστος. Εφόσον δίδονται τα οριακά μεγέθη, τα ολικά προκύπτουν από την ολοκλήρωση των αντίστοιχων οριακών, δηλαδή

$TR(q) = \int MR(q)dq$ και $TC(q) = \int MC(q)dq$

Επειδή μελετάμε τη μεταβολή της ποσότητας παραγωγής μεταξύ των δύο τιμών $q = a$ και $q = b$ θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα ορισμένα ολοκληρώματα, με όρια ολοκλήρωσης τα a και b. Έτσι έχουμε:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = \int_a^b MR(q)dq - \int_a^b MC(q)dq = \int_a^b [MR(q) - MC(q)]dq$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το κέρδος $\Pi(q)$ της επιχείρησης αντιστοιχεί στο εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των δύο συναρτήσεων $MR(q)$ και $MC(q)$ και βρίσκεται υπεράνω του διαστήματος $[a, b]$. Την περιοχή αυτή θα την δείτε στο διάγραμμα σκιασμένη με κίτρινο χρώμα.

(ii) Το κέρδος της επιχείρησης μεγιστοποιείται στη τιμή $q = q_m$ διότι στο σημείο αυτό οι καμπύλες τέμνονται, επομένως $MR(q) = MC(q)$, άρα

$$MR(q) = MC(q) \Leftrightarrow MR(q) - MC(q) = 0 \Leftrightarrow [TR(q)]' - [TC(q)]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [TR(q) - TC(q)]' = 0 \Leftrightarrow \Pi(q)' = 0$$

Συνεπώς στο σημείο $q = q_m$ μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης του κέρδους, επομένως στο σημείο αυτό η $\Pi(q)$ έχει ακρότατο, το οποίο, όπως προκύπτει από το σχήμα είναι μέγιστο. Στο σημείο αυτό τα συνολικά κέρδη της επιχείρησης από την έναρξη παραγωγής του προϊόντος είναι:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q)$$
$$= \int_0^{q_m} MR(q)dq - \int_0^{q_m} MC(q)dq = \int_0^{q_m} [MR(q) - MC(q)]dq$$

Γεωμετρικά αυτό απεικονίζεται από το εμβαδόν της περιοχής την οποία θα δείτε στο διάγραμμα σκιασμένη με πράσινο και κίτρινο χρώμα.
Η περαιτέρω αύξηση της παραγωγής, θα μας οδηγήσει στην κόκκινη περιοχή του διαγράμματος, όπου η καμπύλη του κόστους υπερβαίνει την καμπύλη των εσόδων με αποτέλεσμα τα συνολικά κέρδη να παρουσιάσουν μείωση. ◄