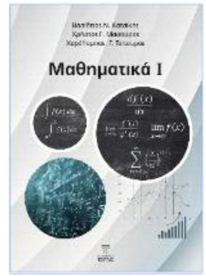
Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης (ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ) - Κεφάλαιο XII

Ημερομηνία διάλεξης: 31-10-2024

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο XII) :

5. Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων απλών κλασμάτων

- Αν μας δοθεί μια ρητή συνάρτηση, δηλαδή ένα κλάσμα δύο πολυωνύμων, τότε αυτή την ονομάζουμε **γνήσια ρητή συνάρτηση, αν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή.**

- Στην αντίθετη περίπτωση την ονομάζουμε **καταχρηστική**. Αν η ρητή συνάρτηση είναι καταχρηστική, μπορούμε να κάνουμε την διαίρεση, οπότε η καταχρηστική ρητή συνάρτηση μετασχηματίζεται στο άθροισμα ενός πολυωνύμου με μια γνήσια ρητή συνάρτηση.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ → $deg(P(x))$, → $deg(Q(x))$

$\boxed{\text{γνήσια}}$ → $deg(P(x)) < deg(Q(x))$

$\boxed{\text{καταχρηστική}}$ → $deg(P(x)) \geq deg(Q(x))$

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

►Παράδειγμα 5.1. Η ρητή συνάρτηση

$$\frac{x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5}{x^2 - 5x + 3}$$

δεν είναι γνήσια. Διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή λαμβάνουμε:

$$\boxed{\frac{x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5}{x^2 - 5x + 3} = x^2 - 2 + \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 3}}$$

$\Delta(x)$ → διαιρετέος

$\delta(x)$ → διαιρέτης

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5 & x^2 - 5x + 3 \\ \hline & \boxed{\pi(x) = \text{πηλίκο}} \\ \boxed{\upsilon(x) = \text{υπολ.}} & \end{array}$$

$\boxed{deg(\upsilon(x)) < deg(\delta(x))}$

$deg(v(x)) < deg(\delta(x))$

Καθώς η ολοκλήρωση των πολυωνύμων δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στην ολοκλήρωση των γνήσιων ρητών συναρτήσεων.

Όπως θα δούμε παρακάτω οι γνήσιες ρητές συναρτήσεις αναλύονται σε αθροίσματα απλών κλασμάτων. Την ολοκλήρωση αυτών των απλών κλασμάτων θα δούμε αμέσως τώρα.

i. $\boldsymbol{\int \frac{A}{x-a} dx}$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{1}{x-a} dx = A\, ln|x-a| + c$$

▶Παράδειγμα 5.2.

α. $\int \frac{5}{x-1} dx = 5\, ln|x-1| + c$

β. $\int \frac{2}{x+3} dx = 2\, ln|x+3| + c$

$\boldsymbol{ii. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx, k \neq 1}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c$$

▶Παράδειγμα 5.3.

α. $\int \frac{5}{(x-1)^3} dx = \frac{5}{(1-3)(x-1)^{3-1}} + c = -\frac{5}{2(x-1)^2} + c$

β. $\int \frac{2}{(x+3)^5} dx = \frac{2}{(1-5)(x+3)^{5-1}} + c = -\frac{1}{2(x+3)^4} + c$

Η μέθοδος του Heaviside

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές A, B και C έτσι ώστε

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

Για να βρούμε το A πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της παραπάνω ταυτοτικής ισότητας με το $x - a$ και έχουμε:

$$\frac{P(x)}{(x-b)(x-c)} \equiv A + \frac{B(x-a)}{x-b} + \frac{C(x-a)}{x-c}$$

Θέτοντας στην ισότητα αυτή $x = a$, βρίσκουμε ότι το A είναι

$$A = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}$$

Ομοίως εργαζόμενοι υπολογίζουμε τα B και C:

$$B = \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)} \text{ και } C = \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}$$

►**Παράδειγμα 6.1.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

Λύση. Αναλύουμε το ρητό κλάσμα

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A, B, C με την μέθοδο του Heaviside:

$$A = \frac{1^2+1+1}{(1-2)(1-3)} = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{2^2+2+1}{(2-1)(2-3)} = -7$$

$$C = \frac{3^2+3+1}{(3-1)(3-2)} = \frac{13}{2}$$

Οπότε:

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x-2} + \frac{13}{2}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{3}{2} ln|x-1| - 7\, ln|x-2| + \frac{13}{2} ln|x-3| + c$$

Ημερομηνία διάλεξης: 31-10-2024

Ασκήσεις:

► Άσκηση 6.1. **(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου XII)**

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+1}{2x^2-10x+12} dx$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$

οπότε αναλύουμε το ρητό κλάσμα $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Με την μέθοδο Heaviside έχουμε:

$$\mathrm{A} = \frac{2+1}{2-3} = -3, B = \frac{3+1}{3-2} = 4$$

Επομένως,

$$\int \frac{x+1}{2x^2-10x+12}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}dx = \frac{1}{2}\left(-3\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{x-3}\right) =$$

$$= 2\, ln|x-3| - \frac{3}{2} ln|x-2| + c$$

►Άσκηση 6.2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$$

Λύση. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή:

$$x^3 + x^2 - 6x = x\left(x^2 + x - 6\right) = x(x-2)(x+3)$$

Στη συνέχεια αναλύουμε το κλάσμα σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A, B, C:

$$A = \frac{0+1}{(0-2)(0+3)} = -\frac{1}{6}, B = \frac{2+1}{2(2+3)} = \frac{3}{10}, C = \frac{-3+1}{-3(-3-2)} = -\frac{2}{15}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} d\boldsymbol{x} = \int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} dx = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{6} ln|x| + \frac{3}{10} ln|x-2| - \frac{2}{15} ln|x+3| + c$$

►**Άσκηση 6.5.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Λύση. Εδώ έχουμε να ολοκληρώσουμε μια καταχρηστική ρητή συνάρτηση. Πρέπει επομένως να προηγηθεί η διαίρεση του αριθμητή δια του παρονομαστή ώστε η συνάρτηση αυτή να καταστεί το άθροισμα ενός πολυωνύμου και μιας γνήσιας ρητής συνάρτησης.

$$2x^3 - 8x^2 + 9x + 1 \quad \Big| \quad x^2 - 4x + 4$$

Εκτελώντας την διαίρεση λαμβάνουμε:

$$\frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} = 2x + \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι:

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Επομένως πρέπει να αναλύσουμε το ρητό κλάσμα $\frac{x+1}{(x-2)^2}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} \equiv \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

Απαλείφοντας τους παρονομαστές έχουμε ότι:

$x + 1 \equiv A_1(x-2) + A_2$

Για $x = 2$ και $x = 0$ (τυχαία "βολική" επιλογή)

έχουμε

και $A_1 = 1$, $A_2 = 3$.

Συνεπώς,

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} \equiv \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

Έχουμε επομένως να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \left[2x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}\right] dx =$$

$$= 2\int x \; dx + \int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2} = x^2 + ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + c$$

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου XII*)

***Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις**

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι μ, ν, αντικαταστήστε πριν την

ολοκλήρωση με:
μ = τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου (ΑΜ) σας +1,
ν = προτελευταίο ψηφίο του ΑΜ σας +1.

35. $\int \frac{\mu x + \nu}{x^2 - 3x + 2} dx$

37. $\int \frac{\mu x + \nu}{x^2 - 4x + 3} dx$

Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε τις ασκήσεις 35 και 37 βάζοντας το δικό μας "μ "και "ν" από τον αριθμό μητρώου (ΑΜ) στη φοιτητική μας ταυτότητα.