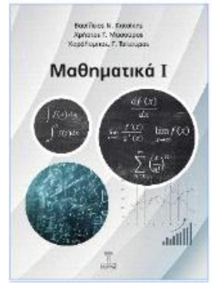
Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης - Κεφάλαιο XII

Ημερομηνία διάλεξης: 23-10-2024

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο XII) :

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \tan x \, dx = -ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x \, dx = ln|\sin x| + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$$

$$\int ln\, x \, dx = x(ln\, x - 1) + c$$

π.χ. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

$\int (x+1)^5 dx = \frac{(x+1)^6}{6} + c$

$\int (2x+1)^5 dx = \frac{(2x+1)^6}{2 \cdot 6} + c$

$$\boxed{\int (\alpha x+\beta)^k dx = \frac{(\alpha x+\beta)^{k+1}}{\alpha (k+1)} + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\alpha x+\beta} dx = \frac{ln|\alpha x+\beta|}{\alpha} + c}$$

π.χ. $\int \cos(3x+4)dx = \frac{\sin(3x+4)}{3} + c$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$(-ln|\cos x|)' = -\frac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = +\tan x$

$\int e^{\alpha x+\beta} dx = \frac{e^{\alpha x+\beta}}{\alpha} + c$

$\int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2} + c$

Θα το αποδείξουμε αργότερα

$$\boxed{(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot ln\,\alpha}$$

$\int 2^x dx = \frac{2^x}{ln 2} + c$

1. Ολοκλήρωση Αθροίσματος

Γνωρίζουμε τους τύπους:

$$\int [c_1 f_1(x)+\ldots+c_n f_n(x)]\,dx = c_1 \int f_1(x)dx+\ldots+c_n \int f_n(x)dx$$

$\int 2x^2 - e^x dx = 2\int x^2 dx - \int e^x dx$

$$\int_a^b [c_1 f_1(x)+\ldots+c_n f_n(x)]dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx+\ldots+c_n \int_a^b f_n(x)dx$$

$\cancel{\int f\cdot g = \int f \cdot \int g}$

Οι τύποι αυτοί απλοποιούν την ολοκλήρωση και μας βοηθούν στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που μπορούν να γραφούν ως άθροισμα στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παραδείγματα:

►**Παράδειγμα 1.1.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \left(2x^4 - 5\sin x + 7\sqrt{x}\right)dx$ **ii.** $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$

iii. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$

Λύση.

i. $\int \left(2x^4 - 5\sin x + 7\sqrt{x}\right)dx = 2\int x^4 dx - 5\int \sin x\,dx + 7\int \sqrt{x}dx =$

$$= 2\left[\frac{x^{4+1}}{4+1} + c_1\right] - 5[(-\cos x) + c_2] + 7\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_3\right] = 2\frac{x^5}{5} + 5\cos x + 14\frac{x\sqrt{x}}{3} + c$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1$$

ii. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)dx =$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int x^{\frac{5}{6}}dx + \int x^{\frac{7}{6}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} + c$$

iii. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx = \int \frac{x}{x}dx - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{1}{x}dx =$

$$= \int dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \frac{1}{x}dx = x - 4\sqrt{x} + \ln x + c$$

Παρατήρηση. Αρκετές φορές έχουμε δει την μέθοδο αυτή να την εφαρμόζουν, κάποιοι φοιτητές, και σε γινόμενα. Αυτό το μεγάλο λάθος πρέπει να προσέχετε να μην το κάνετε. Η ολοκλήρωση του γινομένου δύο συναρτήσεων είναι το θέμα της επομένης παραγράφου. □

2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Θεώρημα 2.1. *Αν οι f' και g' είναι συνεχείς, τότε:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)dx$$

▶ **Παράδειγμα 2.1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:**

i. $\int \ln x\,dx$ **ii.** $\int x\ln x\,dx$

Λύση.

i. $\int \ln x\ dx = \int (x)'(\ln x)dx = x\ln x - \int x(\ln x)'dx =$

$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

ii. $\int x\ln x\ dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'(\ln x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}(\ln x)'dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$$

►**Παράδειγμα 2.2.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int xe^x\,dx$ **ii.** $\int xa^x\,dx$

Λύση.

i. $\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int x'e^x dx = (x-1)\,e^x + c$

ii. $$\int xa^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\int xa^x \ln a\;dx = \frac{1}{\ln a}\int x(a^x)'dx = \frac{1}{\ln a}\left(xa^x - \int a^x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left(xa^x - \frac{1}{\ln a}a^x\right) + c = \frac{a^x}{\ln a}\left(x - \frac{1}{\ln a}\right) + c$$

►**Παράδειγμα 2.3.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

i. $\int e^{-x}\sin x\;dx$

Λύση.

i. Ας ονομάσουμε I το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε.

Τότε

$$I = \int e^{-x}\sin x\;dx = -\int (e^{-x})'\sin x\;dx = -\left[e^{-x}\sin x - \int e^{-x}(\sin x)'dx\right] =$$

$$= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\;dx = -e^{-x}\sin x - \int (e^{-x})'\cos x\;dx =$$

$$= -e^{-x}\sin x - \left[e^{-x}\cos x - \int e^{-x}(\cos x)'dx\right] =$$

$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x + \int e^{-x}(\cos x)'dx =$$

$$= -e^{-x}(\sin x + \cos x) - \int e^{-x}\sin x\;dx =$$

$$= -e^{-x}(\sin x + \cos x) - I$$

Επομένως:

$I = -e^{-x}(\sin x + \cos x) - I \Leftrightarrow 2I = -e^{-x}(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$

▶**Παράδειγμα 2.4.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i. $\int x \cos x \; dx$ **ii.** $\int x \sin x \; dx$

Λύση.

i. $\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int \sin x\, d\,x = x\sin x + \cos x + c$

ii. $\int x\sin x\,dx = -\int x(\cos x)'dx = -\left(x\cos x - \int \cos x\, d\,x\right) = -x\cos x + \sin x + c$

3. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Θεώρημα 3.1. *Έστω οι συναρτήσεις f, g με συνεχείς τις $g \circ f$ και f' σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών. Αν η G είναι η παράγουσα της g, τότε:*

$$\int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + c$$

Θεώρημα 3.2. *Έστω οι συναρτήσεις f, g με συνεχείς τις $g \circ f$ και f' σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν η G είναι η παράγουσα της g, τότε:*

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = G(f(b)) - G(f(a))$$

Αν αντικαταστήσουμε την $f(x)$ με u, τότε ο τύπος αυτός μπορεί να πάρει την παρακάτω βολική, για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, μορφή:

$$\int_a^b g\,[\overbrace{f(x)}^{u}]\,\overbrace{f'(x)dx}^{du} = G(f(b)) - G(f(a)) = \int_{u(a)=f(a)}^{u(b)=f(b)} g(u)\,du$$

▶**Παράδειγμα 3.1.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int 3x^2(x^3+5)\,dx$ **ii.** $\int (x^3+2x+6)(3x^2+2)\,dx$

Λύση. **i.** Θέτουμε $u = x^3 + 5$ οπότε $du = 3x^2 dx.$

Τότε:

$$\int 3x^2(x^3+5)\,dx = \int (\overbrace{x^3+5}^{u})\,(\overbrace{3x^2)dx}^{du} = \int u du = \frac{u^2}{2} + c$$

Άρα

$$\int 3x^2(x^3+5)\,dx = \frac{1}{2}(x^3+5)^2 + c$$

ii. Θέτουμε $u = x^3 + 2x + 6$ οπότε $du = (3x^2+2)dx.$ Τότε:

$$\int (x^3+2x+6)(3x^2+2)\,dx = \int (x^3 \overbrace{+\,2x}^{u} + 6)\,(3x^{\overbrace{2}^{du}} + 2)dx =$$

$$= \int udu = \frac{u^2}{2} + c$$

Επομένως:

$$\int (x^3+2x+6)(3x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}(x^3+2x+6)^2 + c$$ ◄

►Παράδειγμα 3.3. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int (ln\,x)^3 \frac{1}{x} dx$

Λύση. Θέτουμε $u = ln\,x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx.$ Τότε:

$$\int (ln\,x)^3 \frac{1}{x}dx = \int (\overbrace{ln\,x)}^{u^3}{}^3 \overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{du} dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c$$

Άρα

$$\int (\ln x)^3 \frac{1}{x}dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

►Παράδειγμα 3.4. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int sin^4 x\, cos\, x\; dx$ **ii.** $\int \sqrt{sin\, x}\, cos\, x\; dx$

Λύση. **i.** Θέτουμε $u = sin\,x$ οπότε $du = cos\,x\; dx.$

Τότε:

$$\int sin^4 x\, cos\, x\ \ dx = \int (\overbrace{sin^4 x}^{u^4})\,(\overbrace{cos\ x}^{du})dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c$$

Επομένως

$$\int sin^4 x\, cos\, x\ \ dx = \frac{sin^5 x}{5} + c$$

ii. Θέτουμε $u = sin\, x$ οπότε $du = cos\, x\ dx$.

Τότε

$$\int \sqrt{sin\, x}\, cos\, x\ \ dx = \int \left(\overbrace{\sqrt{sin\, x}}^{\sqrt{u}}\right)(\overbrace{cos\ x}^{du})dx$$

$$= \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Άρα

$$\int \sqrt{sin\, x}\, cos\, x\ \ dx = \frac{2}{3} sin^{\frac{3}{2}} x + c$$ ◄

Ημερομηνία διάλεξης: 31-10-2024

Ασκήσεις:

► Άσκηση 3.3. (Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου XII)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{sin\, x} sin\, x\, cos\, x\ \ dx$$

Λύση. Θέτουμε $u = sin\, x$ οπότε $du = cos\, x\ dx$.

Τότε

$$\int e^{sin\, x} sin\, x\, cos\, x\ \ dx = \int ue^u du$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int ue^u du = \int u(e^u)' du = ue^u -= ue^u - \int e^u du = ue^u - e^u + c$$

$$= e^u(u-1) + c$$

Άρα

$$\int e^{\sin x} \sin x \cos x \; dx = e^{\sin x}(\sin x - 1) + c \;\blacktriangleleft$$

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου XII*)
***Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις**

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα. :

25. $\int ln(1 - x)dx, \quad \int ln(1 - x^2)dx$

Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις-παραδείγματα του βιβλίου για εξάσκηση.

▶**Παράδειγμα 2.2.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

iii. $\int_0^1 xe^{-x}dx$	iv. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

Λύση.

iii. $\int_0^1 xe^{-x}dx = -\int_0^1 x(e^{-x})'dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$

$= -xe^{-x}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - \left(e^{-1} - 1\right) = -2e^{-1} + 1 = \dfrac{e-2}{e}$

iv. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = -\int_0^1 x^2(e^{-x})'dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\left(x^2\right)'dx =$

$= -x^2e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}2xdx = -e^{-1} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα το έχουμε ήδη υπολογίσει στο (iii), οπότε:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2\frac{e-2}{e} = \frac{2e-5}{e}$$

▶**Παράδειγμα 3.5.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$	**ii.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$	**iii.** $\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$

Λύση. **i.** Θέτουμε $u = 1 + x^2$ οπότε $du = 2x\, dx$, επομένως,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x\, dx}^{du}}{\underbrace{1+x^2}_{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} ln\, u + c$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right) + c$$

ii. Θέτουμε $u = 1 + x^3$ οπότε $du = 3x^2\, dx$, επομένως,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\, dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{3x^2\, dx}^{du}}{\sqrt{\underbrace{1+x^3}_{u}}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + c$$

Άρα

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + c$$

iii. Θέτουμε $u = x + 1$ οπότε $x = u - 1$ και $du = dx$. Τότε:

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\, du = \int \left(u^2 - 2u + 1\right)u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Συνεπώς,

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$