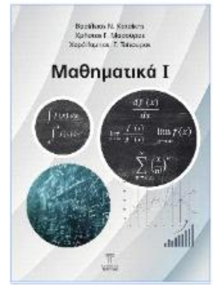
Επαναληπτικές Ασκήσεις

Ημερομηνία διάλεξης: 9-1-2025

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση,
Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3
Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



(Άλυτη Άσκηση Κεφ. V) Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης:

128. $f(x) = x^{\sin x}$

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. VI) ► **Άσκηση 5.7.** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

Λύση. Παρατηρούμε ότι το όριο τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή είναι το $+\infty$. Επομένως εφαρμόζοντας τον κανόνα του de l'Hôpital έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(\ln x)^2\right]'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\frac{1}{x}\ln x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x}$$

Καθώς καταλήξαμε πάλι στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ εφαρμόζουμε εκ νέου τον κανόνα του de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\frac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \blacktriangleleft$$

(Λυμένο Παράδειγμα Κεφ. XII)

► **Παράδειγμα 2.1.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

iii. $\int x^n \ln x \; dx$

Λύση.

$$\int x^n \ln x \; dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' (\ln x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)' dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + c = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c$$

(Λυμένο Παράδειγμα Κεφ. XII)

▶**Παράδειγμα 5.4.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{4}{2x^2 - 4x - 8} dx$$

Λύση.

$$\int \frac{4}{2x^2 - 4x - 8} dx = \frac{4}{2}\int \frac{dx}{x^2 - 2x - 4} = 2\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 - 1 - 4}$$

$$= 2\int \frac{dx}{(x-1)^2 - 5} =$$

$$= 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 - \sqrt{5}^2} = 2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-(x-1)}{\sqrt{5}+(x-1)}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-(x-1)}{\sqrt{5}+(x-1)}\right| + c$$ ◀

(Άλυτη Άσκηση Κεφ. XIII - βλέπε Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου)

1. Η συνάρτηση των οριακών εσόδων μιας μονοπωλιακής επιχείρησης είναι η ακόλουθη:

   $MR(q) = 60 - 2q - 2q^2$

   Αν τα σταθερά έσοδα είναι μηδέν, να βρεθούν:

i. η συνάρτηση των συνολικών εσόδων $TR(q)$

ii. η συνάρτηση ζήτησης $P_d(q)$ (*Υπόδειξη*: ισχύει ότι $TR(q) = P_d(q) \cdot q$)

iii. τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης ζήτησης, δεδομένου ότι η συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την οικονομική συνθήκη να είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Άλυτη Άσκηση Κεφ. XIII - βλέπε Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου)

8. Αν η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι

   $$MC(q) = -\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4}$$

   και η συνάρτηση του συνολικού κόστους έχει ελάχιστη τιμή 10 νομισματικών μονάδων, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης.

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. XIII)▶**Άσκηση 7.10.** Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα προϊόν είναι αντίστοιχα:

$P_d(q) = -q^2 - 5q + 900$ και $P_s(q) = q^2 + 25q$

όπου η ποσότητα μετριέται σε χιλιάδες μονάδες και η τιμή σε ευρώ. Ζητούνται:

i. Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας
ii. Το πλεόνασμα καταναλωτή
iii. Το πλεόνασμα παραγωγού

Λύση. **(i)** Το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται από την εξίσωση της προσφοράς με τη ζήτηση. Συνεπώς στο σημείο ισορροπίας έχουμε:

$$q^2 + 25q = -q^2 - 5q + 900 \Leftrightarrow 2q^2 + 30q - 900 = 0$$

απ' όπου

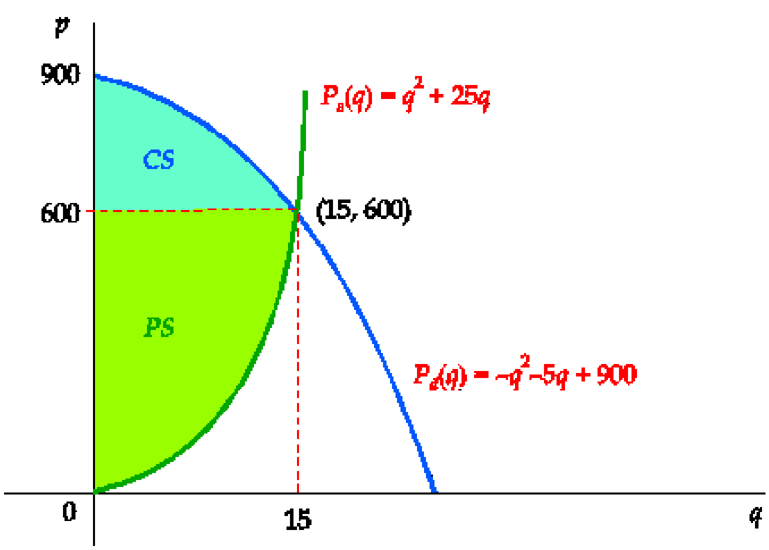
$q_1 = 15$ και $q_2 = -30$

Επειδή η ποσότητα ισορροπίας πρέπει να είναι θετική, η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και συνεπώς $q * = 15$, δηλαδή 15.000 μονάδες. Για να βρούμε τώρα την τιμή ισορροπίας θέτουμε $q = 15$ στη συνάρτηση ζήτησης και έχουμε:

$$p * = 15^2 + 25 \cdot 15 = 600$$

Έτσι η τιμή ισορροπίας είναι 600€ η χιλιάδα.

Στο σχήμα 28, έχουμε σχεδιάσει την συνάρτηση προσφοράς $P_d(q)$ και την συνάρτηση ζήτησης $P_s(q)$ καθώς και το σημείο ισορροπίας $(p *,\ q *) = (15{,}600)$. Έτσι ορίζονται και οι δύο περιοχές CS και PS το εμβαδόν των οποίων δίνει αντίστοιχα το πλεόνασμα καταναλωτή και το πλεόνασμα παραγωγού.



Σχήμα 28

(ii) Στο σημείο ισορροπίας το πλεόνασμα καταναλωτή είναι:

$$CS = \int_0^{q*} P_d(q)\, dq - p^* \cdot\ q^* = \int_0^{15} \left(-q^2 - 5q + 900\right) dq - p^* \cdot q^* =$$

$$= \left[-\frac{q^3}{3} - 5\frac{q^2}{2} + 900q\right]_0^{15} - 600 \cdot 15 = 11812{,}5 - 9000 = 2812{,}5$$

Επειδή η ποσότητα q μετριέται σε χιλιάδες μονάδες, έπεται ότι το πλεόνασμα των καταναλωτών είναι 2.812.500 ευρώ.

(iii) Στο σημείο ισορροπίας το πλεόνασμα παραγωγού είναι:

$$PS = p * \cdot \ q * - \int_0^{q*} P_s(q)\, dq = p * \cdot \ q * - \int_0^{15} \left(q^2 + 25q\right) dq =$$

$$= 15 \cdot 600 - \left[\frac{q^3}{3} + 25\frac{q^2}{2}\right]_0^{15} = 9000 - 3937{,}5 = 5062.5$$

Επειδή η ποσότητα q μετριέται σε χιλιάδες μονάδες, έπεται ότι το πλεόνασμα των παραγωγών είναι 5062.5 ευρώ. ◄

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. XIII) ►**Άσκηση 7.11.** Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν του οποίου η συνάρτηση ζήτησης είναι

$$P_d(q) = -\frac{2}{3}q^2 - 8q + 2600$$

και η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι

$$TC(q) = 2q^2 + 200q + 3000$$

Η τιμή του προϊόντος μετριέται σε ευρώ και η ποσότητα q σε τόνους. Ζητούνται:

i. Να βρεθεί ο αριθμός μονάδων και η τιμή μονάδας που μεγιστοποιούν τα κέρδη.

ii. Να βρεθεί το πλεόνασμα καταναλωτή αν το προϊόν πωλείται στην τιμή που η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της.

Λύση. **(i)** Η συνάρτηση του κέρδους είναι

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q)$$

όπου $TR(q)$ είναι η συνάρτηση των συνολικών εσόδων. Πρέπει λοιπόν πρώτα να βρούμε την συνάρτηση των συνολικών εσόδων, η οποία προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την τιμή επί την ποσότητα. Έτσι έχουμε:

$$TR(q) = P_d(q) \cdot q = \left(-\frac{2}{3}q^2 - 8q + 2600\right) \cdot q = -\frac{2}{3}q^3 - 8q^2 + 2600q$$

Επομένως η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = -\frac{2}{3}q^3 - 8q^2 + 2600q - \left(2q^2 + 200q + 3000\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}q^3 - 10q^2 + 2400q - 3000$$

Αναζητούμε τώρα την τιμή της q που μεγιστοποιεί την $\Pi(q)$. Για να βρούμε την τιμή αυτή πρέπει να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της $\Pi(q)$ και στη συνέχεια να εξετάσουμε που αυτή μηδενίζεται.

$$\frac{d[\Pi(q)]}{dq} = \frac{d\left(-\frac{2}{3}q^3 - 10q^2 + 2400q - 3000\right)}{dq} = -2q^2 - 20q + 2400$$

$\frac{d[\Pi(q)]}{dq} = 0 \Leftrightarrow -2q^2 - 20q + 2400 = 0$ απ' όπου $q_1 = 30, q_2 = -40$

Από τις δύο ρίζες δεκτή κάνουμε μόνο την θετική $q_1 = 30$, επειδή αρνητική ποσότητα προϊόντος στερείται οικονομικού περιεχομένου. Επιπλέον

$$\frac{d^2[\Pi(q)]}{dq^2} = -4q - 20$$

Η δεύτερη παράγωγος της $\Pi(q)$ στο $q = 30$ είναι $-4 \cdot 30 - 20 = -140 < 0$, δηλαδή αρνητική. Έπεται συνεπώς ότι η $\Pi(q)$ μεγιστοποιείται στο σημείο αυτό, με αντίστοιχη τιμή των κερδών:

$$\Pi(30) = -\frac{2}{3} \cdot 30^3 - 10 \cdot 30^2 + 2400 \cdot 30 - 3000 = 42000$$

Η τιμή μονάδας προϊόντος όταν $q = 30$ είναι:

$$P_d(30) = -\frac{2}{3} \cdot 30^2 - 8 \cdot 30 + 2600 = 1760$$

(ii) Όταν η επιχείρηση θέτει ως τιμή πώλησης τα 1760€ το πλεόνασμα καταναλωτή είναι:

$$CS = \int_0^{q*} P_d(q)\, dq - p*\cdot\ q* = \int_0^{30} \left(-\frac{2}{3}q^2 - 8q + 2600\right) dq - p*\cdot\ q* =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\frac{q^3}{3} - 8\frac{q^2}{2} + 2600q\right]_0^{30} - 1760 \cdot 30 =$$

$$= -\frac{2 \cdot 30^3}{9} - 4 \cdot 30^2 + 2600 \cdot 30 - 52800 = 68400 - 52800 = 15600 \ ◀$$