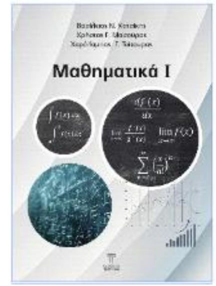
Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο XIII) :

3. Οικονομικές Συναρτήσεις

i. Η συνάρτηση ζήτησης

Η **συνάρτηση ζήτησης ή συνάρτηση ζητούμενης ποσότητας** (***demand function "D" ή demanded quantity function "Q_d"* ή "q_d"**) θεωρούμε ότι εξαρτάται μόνον από την επίδραση της **τιμής (*price "p"*)** του προϊόντος επί της ζήτησης.

- Είναι εύλογο και προφανές ότι **αν η τιμή p αυξάνεται**, τότε οι καταναλωτές έχουν την τάση **να μειώνουν τη ζητούμενη ποσότητα q_d** από το προϊόν αυτό, ενώ όταν η τιμή p μειώνεται, τότε οι καταναλωτές έχουν την τάση να αυξάνουν τη ζητούμενη ποσότητα.
- Αν θελήσουμε την παραπάνω διαπίστωση, που συνηθίζεται να αποκαλείται «**νόμος της ζήτησης**», να τη διατυπώσουμε χρησιμοποιώντας τη μαθηματική ορολογία, θα πούμε απλά ότι η συνάρτηση $D(p)$ είναι φθίνουσα ή ισοδύναμα ότι $\frac{dD(p)}{dp} \leq 0$ για κάθε p του πεδίου ορισμού της.
- Βέβαια, για να καθορίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ζήτησης, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι δεν υπάρχει οικονομικό νόημα σε «αρνητική τιμή» ή σε «αρνητική ζητούμενη ποσότητα».

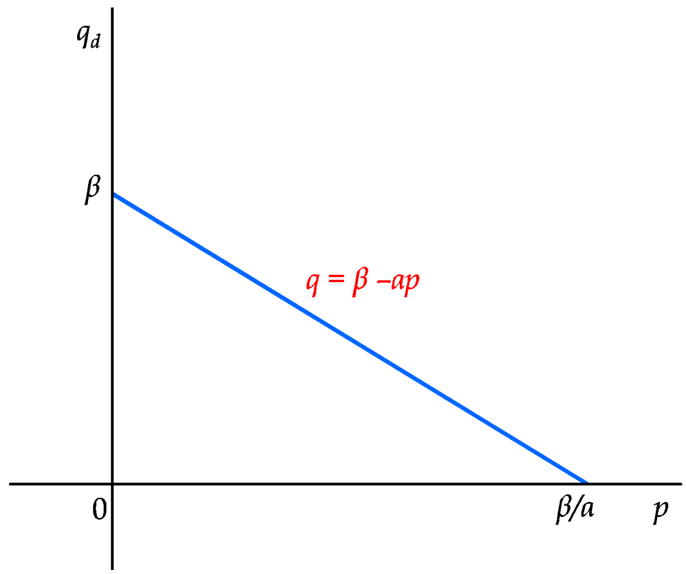
- Έτσι οι μαθηματικές σχέσεις που ορίζουν μια συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$p \geq 0, \qquad D(p) \geq 0, \qquad \frac{dD(p)}{dp} \leq 0$$

- Η πιο απλή μορφή συνάρτησης ζήτησης είναι η γραμμική, η οποία εμφανίζεται αν η ζητούμενη ποσότητα q μειώνεται κατά $\alpha > 0$ μονάδες για κάθε μοναδιαία αύξηση της p. Η γενική μορφή της συνάρτησης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$D(p) = \beta - \alpha p, \;\; \acute{o}\pi o\upsilon \;\; D(p) \geq 0, \; p \geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha, \beta > 0$$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί, φαίνεται το γράφημα της συνάρτησης ζήτησης όταν αυτή είναι γραμμική.



ii. Η συνάρτηση προσφοράς

Ενώ η συνάρτηση ζήτησης αφορά τους καταναλωτές, δηλαδή εκείνους που ζητούν το προϊόν, η συνάρτηση προσφοράς ή συνάρτηση προσφερόμενης ποσότητας (*Supply function "S" ή Supplied quantity*) αφορά τους παραγωγούς, δηλαδή εκείνους που προσφέρουν το προϊόν.

Η **συνάρτηση προσφοράς ή συνάρτηση προσφερόμενης ποσότητας** (***supply function "S" ή supplied quantity function "Q_S"*** **ή** ***"q_S"***) θεωρούμε ότι εξαρτάται μόνον από την επίδραση της **τιμής** (***price "p"***) του προϊόντος επί της ζήτησης.

- Είναι προφανές ότι αν η τιμή p του προϊόντος αυξάνεται, τότε οι παραγωγοί έχουν την τάση να αυξάνουν την προσφερόμενη ποσότητα q_S για το προϊόν αυτό, ενώ όταν η τιμή p μειώνεται, τότε οι παραγωγοί έχουν την τάση να μειώνουν τη προσφερόμενη ποσότητα.
- Η παραπάνω διαπίστωση συνηθίζεται να αποκαλείται «**νόμος της προσφοράς**». Αν Αν θελήσουμε να διατυπώσουμε το νόμο της προσφοράς χρησιμοποιώντας τη μαθηματική ορολογία, θα πούμε απλά ότι η συνάρτηση $S(p)$ είναι αύξουσα ή ισοδύναμα ότι $\frac{dS(p)}{dp} \geq 0$ για κάθε p του πεδίου ορισμού της.
- Εξάλλου, όπως και στην περίπτωση της προσφοράς, έτσι και εδώ δεν υπάρχει οικονομικό νόημα σε «αρνητική τιμή» ή σε «αρνητική προσφερόμενη ποσότητα». Κατά συνέπεια οι μαθηματικές σχέσεις που ορίζουν μια συνάρτηση προσφοράς

είναι:

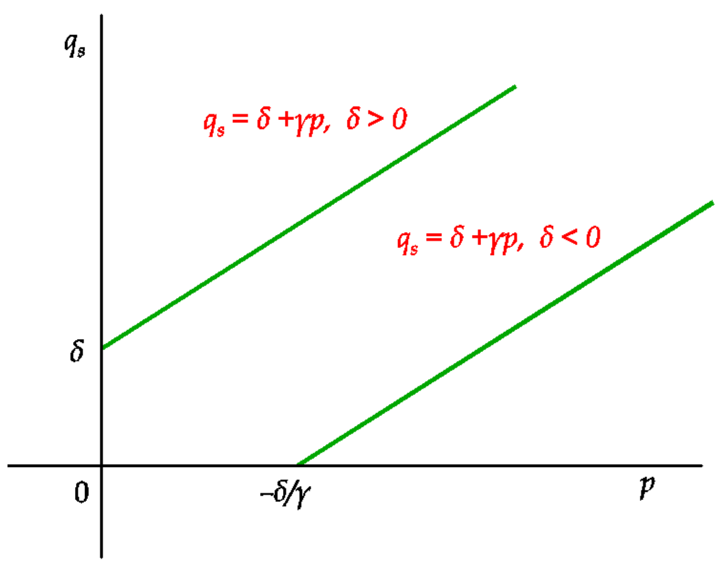
$$p \geq 0, \qquad S(p) \geq 0, \qquad \frac{dS(p)}{dp} \geq 0$$

Σχόλιο. Στις αγορές συμβαίνει να συναντά κανείς κάποια φαινόμενα τα οποία αντιβαίνουν τους νόμους της προσφοράς και της ζήτησης. Τέτοια φαινόμενα μελέτησαν ο Σκοτσέζος Robert Giffen (1837-1910), ο Αμερικάνος Thorstein Bunde Veblen (1857-1929) και άλλοι. Επίσης συχνά βλέπουμε να κάμπτεται η ισχύς των νόμων αυτών στις χρηματιστηριακές αγορές αξιών.

Η πιο απλή μορφή συνάρτησης προσφοράς είναι η γραμμική, η οποία εμφανίζεται αν η προσφερόμενη ποσότητα q_S αυξάνεται κατά $\delta > 0$ μονάδες για κάθε μοναδιαία αύξηση της p. Η γενική μορφή της συνάρτησης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$S(p) = \delta + \gamma p, \ \text{όπου} \ S(p) \geq 0, \ p \geq 0 \ \text{και} \ \gamma > 0$$

Στο διάγραμμα που ακολουθεί, φαίνεται το γράφημα της συνάρτησης προσφοράς όταν αυτή είναι γραμμική.



►**Παράδειγμα 3.2.** Ένας παραγωγός διαθέτει το προϊόν του, όταν η τιμή ανά μονάδα υπερβεί τις 5 νομισματικές μονάδες. Για κάθε επιπλέον νομισματική μονάδα ο παραγωγός αυξάνει την προσφορά του κατά δύο μονάδες προϊόντος.
Να βρεθεί και να σχεδιασθεί η συνάρτηση προσφοράς $S(p)$.

Λύση. **(α)** Προφανώς η συνάρτηση προσφοράς είναι μία γραμμική συνάρτηση, της μορφής $S(p) = \delta + \gamma p$. Όταν η τιμή είναι $p = 5$, τότε η ποσότητα που διατίθεται είναι $q = 0$. Όταν η τιμή αυξηθεί κατά μία νομισματική μονάδα, δηλαδή όταν $p = 6$, τότε η προσφορά θα αυξηθεί κατά δύο μονάδες προϊόντος, δηλαδή θα είναι $q = 2$.

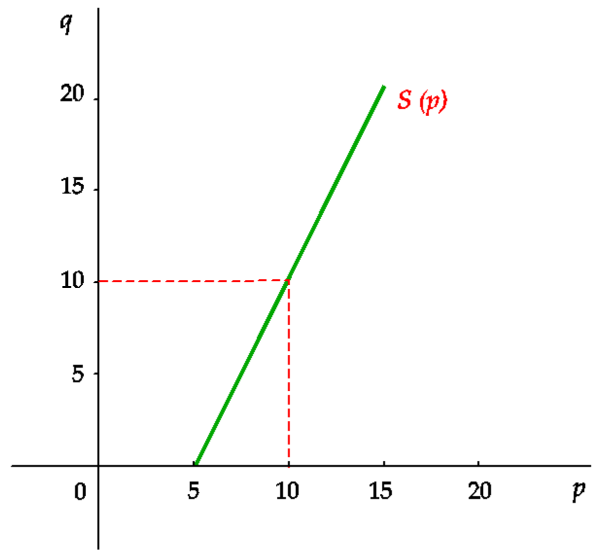
Έχουμε συνεπώς το σύστημα:

$$\begin{matrix} \delta + 5\gamma = 0 \\ \delta + 6\gamma = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \gamma = 2 \\ \delta = -10 \end{matrix}$$

Επομένως η συνάρτηση είναι η:

$$S(p) = -10 + 2p.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής δίνεται από το ακόλουθο διάγραμμα:



iii. Ισορροπία αγοράς

Η ισορροπία των αγορών είναι μια έννοια στην οικονομική επιστήμη η οποία έχει μελετηθεί πολύπλευρα και σε βάθος. Εδώ εμείς θα παρουσιάσουμε μια απλή περίπτωση στατικής ισορροπίας. Θα θεωρήσουμε ένα μόνον αγαθό με τρείς μεταβλητές: τη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού q_d, την προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού q_s και την τιμή του p. **Σημείο ισορροπίας** (*equilibrium point*) σε μια τέλεια ανταγωνιστική αγορά είναι το σημείο στο οποίο η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού. Η τιμή p^* του αγαθού στο σημείο αυτό ονομάζεται **τιμή ισορροπίας** και η αντίστοιχη ποσότητα q^*, **ποσότητα ισορροπίας**. Η μαθηματική διατύπωση των παραπάνω έχει ως εξής:

$$q_d = q_s = q^*$$
$$p_d = p_S = p^*$$

iv. Η συνάρτηση κόστους

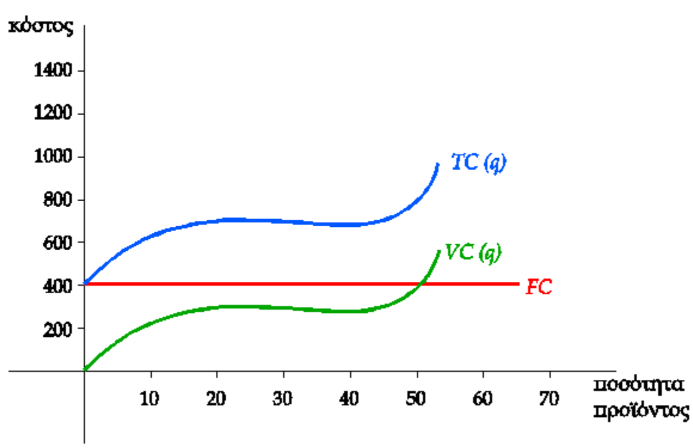
Το **σταθερό** ή **πάγιο κόστος** (*fixed cost*) FC, είναι το κόστος των παραγωγικών συντελεστών που δεν μπορούν να μεταβληθούν βραχυχρόνια και παραμένει σταθερό για μία επιχείρηση ανεξάρτητα από τον όγκο της παραγωγής της. Για παράδειγμα, τα ενοίκια, τα ασφάλιστρα, οι μισθοί των στελεχών κλπ. διαμορφώνουν το σταθερό κόστος μιας επιχείρησης που είναι υποχρεωμένη να το υποστεί ακόμα κι αν δεν παράγει τίποτα.

Το **μεταβλητό κόστος** (*variable cost*) $VC(q)$, σε αντίθεση με το σταθερό, αποτελεί το κόστος των παραγωγικών συντελεστών που μπορούν να μεταβληθούν ανάλογα με το επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης. Για παράδειγμα, το κόστος των υλικών, τα ημερομίσθια, η δαπάνη για αγορά ενεργειακών πόρων κλπ μεταβάλλονται όταν αυξομειώνεται η παραγωγή. Έτσι το μεταβλητό κόστος μιας επιχείρησης συγκροτείται από όλα τα στοιχεία κόστους που δεν είναι σταθερά.

Το **συνολικό κόστος** (*total cost*) $TC(q)$ ή $C(q)$ παραγωγής ενός προϊόντος αποτελείται από το άθροισμα του σταθερού και του μεταβλητού κόστους, δηλαδή ισχύει η ισότητα:

$$TC(q) = FC + VC(q)$$

- Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε απεικονίσει τις παραπάνω τρείς συναρτήσεις κόστους.
- Πρέπει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους εκφράζεται πάντοτε ως συνάρτηση του q και είναι συνήθως αύξουσα.



v. Τα συνολικά έσοδα

Τα **συνολικά έσοδα** (*total revenue*) TR μιας επιχείρησης είναι το γινόμενο της τιμής p στην οποία πωλεί το προϊόν της επί τον φυσικό όγκο q των πωλήσεών της. Δηλαδή:

$$TR = p \cdot q$$

►**Παράδειγμα 3.4.** Αν η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος που παράγει μια επιχείρηση δίνεται από τον τύπο

$D(p) = 12 - 3p$

μπορούμε να γράψουμε

$q = 12 - 3p$ ή ισοδύναμα $p = 4 - \frac{1}{3}q$

Επομένως

$$TR(q) = q \cdot \left(4 - \frac{1}{3}q\right) \Leftrightarrow TR(q) = 4q - \frac{1}{3}q^2$$

vi. Το συνολικό κέρδος

Ως **κέρδος** Π μιας επιχείρησης ορίζεται η διαφορά των συνολικών εσόδων από το συνολικό κόστος, δηλαδή,

$$\boxed{\Pi(q) = TR(q) - TC(q)}$$

Τα σημεία στα οποία η παραπάνω διαφορά μηδενίζεται ονομάζονται νεκρά σημεία. Δηλαδή το **νεκρό σημείο** μιας επιχείρησης είναι εκείνο το επίπεδο παραγωγής στο οποίο τα συνολικά έσοδα είναι ίσα με το συνολικό κόστος. Όταν $\Pi(q) < 0$ αντί να μιλάμε για αρνητικό κέρδος, συνήθως αναφερόμαστε σε **έλλειμμα** ή **ζημίες**.

►**Παράδειγμα 3.6.** Αν η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι

$D(p) = 120 - p$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι

$TC(q) = 2q^2 + 6q + 216$

να βρεθεί η συνάρτηση που δίνει το συνολικό κέρδος και να προσδιορισθούν τα νεκρά σημεία αν υπάρχουν τέτοια.

Λύση. Αν συμβολίσουμε με q την ζητούμενη ποσότητα από το προϊόν, τότε

$$q = 120 - p \Leftrightarrow p = 120 - q$$

Επομένως η συνάρτηση συνολικών εσόδων είναι:

$$TR(q) = pq = (120 - q)q = 120q - q^2$$

Συνεπώς, η συνάρτηση που μας δίνει το συνολικό κέρδος της επιχείρησης είναι:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = 120q - q^2 - (2q^2 + 6q + 216) =$$
$$= 120q - q^2 - 2q^2 - 6q - 216 = -3q^2 + 114q - 216$$

Για να εξετάσουμε αν υπάρχει νεκρό σημείο, θα διερευνήσουμε αν η συνάρτηση

$$\Pi(q) = -3q^2 + 114q - 216$$

έχει πραγματικές ρίζες. Όμως η $\Pi(q)$ είναι ένα τριώνυμο, συνεπώς η ύπαρξη πραγματικών ριζών εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσάς του. Είναι:

$$\Delta = 114^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-216) = 10404$$

Συνεπώς $\Delta > 0$, άρα υπάρχουν δύο νεκρά σημεία. Στα νεκρά σημεία οι ζητούμενες ποσότητες είναι:

$$q_{1,2} = \frac{-114 \pm \sqrt{10404}}{2 \cdot (-3)} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 2 \\ q_2 = 36 \end{cases}$$

και οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$$p = 120 - q = \begin{cases} 120 - 2 = 118 \\ 120 - 36 = 84 \end{cases}$$

5. Μέσες Συναρτήσεις και Οριακές Συναρτήσεις

Η **μέση συνάρτηση** (*average function*) δίνει μια έκφραση για τη μέση τιμή ενός οικονομικού μεγέθους (κόστος, έσοδα, κέρδος κλπ) πάνω σε ένα διάστημα. Έτσι αν $TF(q)$ είναι η συνάρτηση ενός συνολικού οικονομικού μεγέθους, τότε η μέση συνάρτηση $AF(q)$ ορίζεται ως:

$$AF(q) = \frac{TF(q)}{q}$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο τέτοιες συναρτήσεις.

i. Μέσα έσοδα

Τα **μέσα έσοδα** (*average revenue*) AR προσδιορίζονται διαιρώντας τα συνολικά έσοδα TR με την πωληθείσα ποσότητα q, δηλαδή:

$$AR = \frac{TR}{q}$$

►**Παράδειγμα 5.1.** Αν η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος που παράγει μια επιχείρηση δίνεται από τον τύπο

$$D(p) = 20 - \frac{1}{2}p$$

μπορούμε να γράψουμε

$$q = 20 - \frac{1}{2}p$$

ή ισοδύναμα

$$p = 40 - 2q$$

Άρα τα συνολικά έσοδα είναι

$$TR(q) = q \cdot (40 - 2q) \Leftrightarrow TR(q) = 40q - 2q^2$$

Επομένως τα μέσα έσοδα είναι

$$AR(q) = \frac{TR(q)}{q} = \frac{40q - 2q^2}{q} = 40 - 2q$$

ii. Μέσο κόστος

Το **μέσο κόστος** (*average cost*) AC είναι το συνολικό κόστος TC διαιρούμενο με την ποσότητα του παραγομένου προϊόντος q, δηλαδή:

$$AC = \frac{TC}{q}$$

Το συνολικό κόστος είναι όμως το άθροισμα του σταθερού κόστους με το μεταβλητό κόστος. Έτσι:

$$AC = \frac{TC}{q} = \frac{FC + VC}{q} = \frac{FC}{q} + \frac{VC}{q}$$

Επομένως το μέσο κόστος είναι το άθροισμα του **μέσου σταθερού κόστους** (*average fixed cost*) $AFC = \frac{FC}{q}$ και του **μέσου μεταβλητού κόστος** (*average variable cost*) $AVC = \frac{VC}{q}$,   δηλαδή

$$AC = AFC + AVC$$

iii. Οριακά έσοδα

Τα **οριακά έσοδα** (*marginal revenue*) MR είναι η πρώτη παράγωγος των συνολικών εσόδων, δηλαδή:

$$MR(q) = \frac{dTR(q)}{dq}$$

►**Παράδειγμα 5.2.** Αν η συνάρτηση συνολικών εσόδων ενός προϊόντος που παράγει μια επιχείρηση δίνεται από τον τύπο

$$TR(q) = 30q - 2q^2$$

τότε η συνάρτηση μέσων εσόδων είναι

$$AR(q) = \frac{TR(q)}{q} = \frac{30q - 2q^2}{q} = 30 - 2q$$

ενώ η συνάρτηση οριακών εσόδων είναι:

$$MR(q) = \frac{dTR(q)}{dq} = \frac{d(30q - 2q^2)}{dq} = 30 - 4q$$

►**Παράδειγμα 5.3.** Έστω ότι τα οριακά έσοδα MR μιας επιχείρησης εξαρτώνται από τις πωλήσεις και δίνονται από την συνάρτηση:

$$MR(q) = 60 - 2q - 2q^2$$

Αν τα **σταθερά έσοδα είναι μηδενικά** να βρεθεί η συνάρτηση των συνολικών εσόδων.

Λύση. Εφόσον τα οριακά έσοδα MR είναι, σύμφωνα με τα παραπάνω, η πρώτη παράγωγος των συνολικών εσόδων TR, έπεται ότι

$$TR(q) = \int MR(q)\,dq = \int (60 - 2q - 2q^2)\,dq = \int 60dq - 2\int qdq - 2\int q^2dq =$$

$$= 60q - q^2 - \tfrac{2}{3}q^3 + c$$

Δεδομένου ότι τα σταθερά έσοδα της επιχείρησης είναι μηδέν, θα έχουμε $TR(0) = 0$. Επομένως $c = 0$, και συνεπώς η συνάρτηση των συνολικών εσόδων είναι η

$$TR(q) = 60q - q^2 - \tfrac{2}{3}q^3$$

iv. Οριακό κόστος

Το **οριακό κόστος** (*marginal cost*) MC είναι η πρώτη παράγωγος του συνολικού κόστους, δηλαδή:

$$MC(q) = \frac{dTC(q)}{dq}$$

Όμως το συνολικό κόστος *TC* ισούται με το άθροισμα του σταθερού κόστους *FC* και του μεταβλητού κόστους *VC*. Έτσι:

$$MC = \frac{d(TC)}{dq} = \frac{d(FC+VC)}{dq} = \frac{d(FC)}{dq} + \frac{d(VC)}{dq}$$

Επειδή η συνάρτηση FC είναι σταθερά έπεται ότι $\frac{d(FC)}{dq} = 0$ και επομένως:

$$MC = \frac{d(VC)}{dq} = MVC$$

Σημείωση. Το οριακό κόστος εκφράζει τη μεταβολή του κόστους από την κατά μια μονάδα αύξηση της παραγωγής του προϊόντος.

Πρόταση 5.1. *Η συνάρτηση* $AF(q) = \frac{TF(q)}{q}$ *ενός μέσου μεγέθους έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που είναι ίση με την συνάρτηση* $MF(q)$ *του αντίστοιχου οριακού μεγέθους.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $AF(q)$ έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η παράγωγός της μηδενίζεται. Όμως:

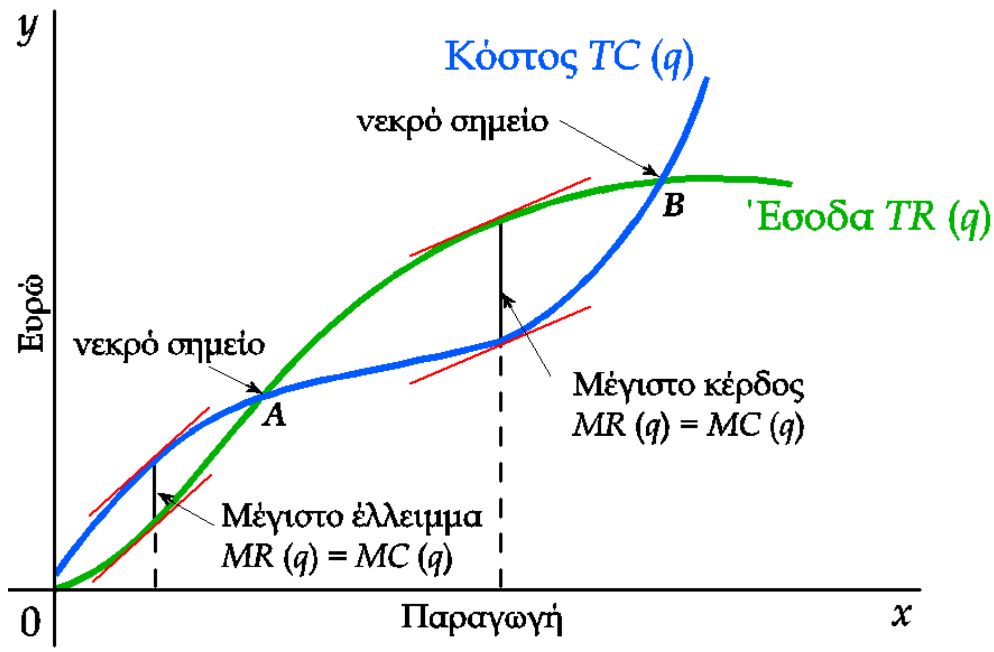
$$[AF(q)]' = \frac{[TF(q)]'q - TF(q)q'}{q^2} = \frac{[TF(q)]'q - TF(q)}{q^2}$$

Επομένως $[AF(q)]' = 0$ στα σημεία q_v που ο αριθμητής μηδενίζεται, δηλαδή:

$[TF(q_v)]'q_v - TF(q_v) = 0$ ή $[TF(q_v)]'q_v = TF(q_v)$

απ' όπου $[TF(q_v)]' = \frac{TF(q_v)}{q_v}$ ή $MF(q_v) = AF(q_v)$

Πρόταση 5.2. (ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ) *Όταν μεγιστοποιείται το κέρδος (ή το έλλειμμα), τότε το οριακό κόστος είναι ίσο με τα οριακά έσοδα.*



►**Παράδειγμα 5.4.** Έστω ότι η συνάρτηση των εσόδων μιας επιχείρησης είναι $TR(q) = 7q$ και ότι η συνάρτηση οριακού κόστους είναι $MC(q) = 3q^2 - 18q + 22$, όπου η παραγωγή μετριέται σε χιλιάδες τεμάχια. Αν το σταθερό κόστος είναι μηδενικό, να βρεθούν

(i) τα νεκρά σημεία της επιχείρησης

(ii) το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιείται (α) το κέρδος και (β) η ζημία.

Λύση. (i) Στα νεκρά σημεία της επιχείρησης το συνολικό κόστος ισούται με τα σταθερά έσοδα (κέρδος $= TR(q) - TC(q) = 0$), δηλαδή ισχύει $TC(q) = TR(q)$.

Επομένως πρέπει να βρούμε πρώτα το συνολικό κόστος:

$$TC(q) = \int MC(q)\,dq = \int (3q^2 - 18q + 22)\,dq = 3\frac{q^3}{3} - 18\frac{q^2}{2} + 22q + c$$
$$= q^3 - 9q + 22q + c$$

Επειδή όμως το σταθερό κόστος είναι μηδενικό, έπεται ότι $c = 0$, άρα

$$TC(q) = q^3 - 9q + 22q.$$

Τώρα για τα νεκρά σημεία έχουμε:

$TC(q) = TR(q) \Leftrightarrow q^3 - 9q^2 + 22q = 7q \Leftrightarrow q^3 - 9q^2 + 15q = 0 \Leftrightarrow (q^2 - 9q + 15)q = 0$

Άρα $q_1 = 0$, $q_2 = \frac{9-\sqrt{21}}{2} \approx 2.209$ και $q_3 = \frac{9+\sqrt{21}}{2} \approx 6.791$.

Κατά συνέπεια τα νεκρά σημεία της επιχείρησης, όταν αυτή βρίσκεται σε φάση παραγωγής ($q > 0$), είναι στα επίπεδα των 2.209 τεμαχίων και των 6.791 τεμαχίων.

(ii) Η συνάρτηση του κέρδους

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = 7q - (q^3 - 9q^2 + 22q) = -q^3 + 9q^2 - 15q$$

εμφανίζει ακρότατα (μεγιστοποίηση κέρδους ή ζημίας) εκεί όπου μηδενίζεται η

$$\Pi'(q) = -3q^2 + 18q - 15$$

Οι δύο λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\Pi'(q) = 0$ είναι οι $q_1 = 1$ και $q_2 = 5$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια την δεύτερη παράγωγο της $\Pi(q)$:

$$\Pi''(q) = -6q + 18$$

Καθώς

$$\Pi''(1) = 12 > 0 \;\text{ και }\; \Pi''(5) = -12 < 0,$$

έπεται ότι όταν το επίπεδο παραγωγής είναι στα 1.000 τεμάχια, **μεγιστοποιείται η ζημία**,

ενώ όταν το επίπεδο παραγωγής είναι στα 5.000 τεμάχια, **μεγιστοποιείται το κέρδος**.

Ημερομηνία διάλεξης: 28-11-2024

6. Ελαστικότητα Συναρτήσεων

Η **ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή** είναι η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας ως προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής, δηλαδή:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

ή κάνοντας το σύνθετο κλάσμα απλό:

$$\varepsilon = \frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Μια αύξηση της τιμής κατά 5% είναι η ίδια ποσοστιαία αύξηση ασχέτως αν η τιμή εκφράζεται σε δολάρια, σε ευρώ ή σε γεν. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις ποσοστιαίες μεταβολές αποσυνδέουμε τη μέτρησή μας από τις μονάδες μέτρησης. Όταν μάλιστα οι μεταβολές είναι απειροστές, τότε οι εκφράσεις Δp και Δq ανάγονται στα διαφορικά dp και dq οπότε λαμβάνουμε τη μορφή:

$$\varepsilon = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

Αντίστοιχα έχουμε την ελαστικότητα στην προσφορά, στα έσοδα, στο εισόδημα κλπ. Γενικά μιλώντας έχουμε τους παρακάτω ορισμούς

i. Ελαστικότητα σημείου

Έστω $y = f(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε

Ορισμός 6.1. Η **ελαστικότητα σημείου** ή **σημειακή ελαστικότητα** (*point elasticity*) μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι μια άλλη συνάρτηση, που συμβολίζεται με $Ef(x)$ ή ε_y ή απλά ε (όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης) και η οποία ορίζεται ως ο λόγος του σχετικού ρυθμού μεταβολής $\frac{dy}{y}$ της y δια του σχετικού ρυθμού μεταβολής $\frac{dx}{x}$ της x, δηλαδή:

$$\varepsilon = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Επειδή $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ο παραπάνω τύπος μπορεί να λάβει τη μορφή

$$\varepsilon = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

που είναι η πλέον εύχρηστη και η συνήθως χρησιμοποιούμενη.

i. Αν στο σημείο x_o έχουμε

$$|\varepsilon| < 1$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **ανελαστική** στο σημείο αυτό.

ii. Αν στο σημείο x_o είναι

$$|\varepsilon| = 1$$

τότε λέμε ότι έχουμε **μοναδιαία ελαστικότητα**.

iii. Αν στο σημείο x_o έχουμε

$$|\varepsilon| > 1$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **ελαστική** στο σημείο αυτό.

Οικονομική Ερμηνεία Ελαστικότητας: Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση f είναι μια συνάρτηση ζήτησης, τότε **αύξηση κατά 1% στην τιμή του προϊόντος** θα έχει ως αποτέλεσμα τη **μείωση της ζήτησης** κατά ένα σταθερό ποσοστό σε κάθε σημείο της καμπύλης ζήτησης το οποίο θα είναι **της τάξης του ε%.**

Πρόταση 6.1. (Την αντιμετωπίζουμε σαν απλή άσκηση) *Η ελαστικότητα της συνάρτηση $y = f(x)$ δίνεται από τον τύπο:*

$$\varepsilon = \frac{[\ln f(x)]'}{[\ln x]'}$$

Απόδειξη . Επειδή

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

έχουμε τις ισότητες:

$$\varepsilon = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} = [\ln f(x)]' \cdot \frac{1}{[\ln x]'} = \frac{[\ln f(x)]'}{[\ln x]'}$$

Πρόταση 6.2. (Την αντιμετωπίζουμε σαν απλή άσκηση) *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε για τις ελαστικότητες ισχύουν οι ιδιότητες:*

$i. E\big(f(x) \cdot g(x)\big) = Ef(x) + Eg(x)$

$ii. E\dfrac{f(x)}{g(x)} = Ef(x) - Eg(x)$

$iii. E\big(f(x) + g(x)\big) = \dfrac{f(x) \cdot Ef(x) + g(x) \cdot Eg(x)}{f(x) + g(x)}$

$iv. E\big(f(x) - g(x)\big) = \dfrac{f(x) \cdot Ef(x) - g(x) \cdot Eg(x)}{f(x) - g(x)}$

$v. E\big[f\big(g(x)\big)\big] = Ef(x) \cdot Eg(x)$

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών στηρίζονται στις αντίστοιχες ιδιότητες των παραγώγων. Έτσι, για παράδειγμα έχουμε:

$$i. E[f(x) \cdot g(x)] = \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} \cdot [f(x) \cdot g(x)]' = \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} \cdot [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] =$$

$$= \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} \cdot f'(x) \cdot g(x) + \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} \cdot f(x) \cdot g'(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) + \frac{x}{g(x)} \cdot g'(x) =$$

$$= Ef(x) + Eg(x)$$

$$\text{iii. } E(f(x) + g(x)) = \frac{x}{f(x) + g(x)} \cdot [f(x) + g(x)]' = \frac{x}{f(x) + g(x)} \cdot [f'(x) + g'(x)] =$$

$$= \frac{xf'(x) + xg'(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{f(x)\frac{x}{f(x)}f'(x) + g(x)\frac{x}{g(x)}g'(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{f(x) \cdot Ef(x) + g(x) \cdot Eg(x)}{f(x) + g(x)}$$

Όμοια γίνεται η απόδειξη και των υπολοίπων ιδιοτήτων.

►**Παράδειγμα 6.2.** Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια ιδιοτήτων, η ελαστικότητα της συνάρτησης

$h(x) = \sqrt[3]{x^3+2} \cdot e^{x^2+5}$

Λύση. Θέτουμε $f(x) = \sqrt[3]{x^3+2}$ και $g(x) = e^{x^2+5}$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα 6.2.i έχουμε:

$$Eh(x) = Ef(x) + Eg(x)$$

Όμως: $Ef(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+2}}\left(\sqrt[3]{x^3+2}\right)' = \dfrac{x}{(x^3+2)^{1/3}}(x^3+2)^{-2/3}x^2 = \dfrac{x^3}{x^3+2}$

$$Eg(x) = \frac{x}{e^{x^2+5}}\left(e^{x^2+5}\right)' = \frac{x}{e^{x^2+5}}2xe^{x^2+5} = 2x^2$$

Άρα $Eh(x) = \dfrac{x^3}{x^3+2} + 2x^2$

Πρόταση 6.3. (Την αντιμετωπίζουμε σαν απλή άσκηση)

Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και η συνάρτηση f παραγωγίσιμη, τότε

i. $E(a) = 0$

ii. $E(af(x)) = Ef(x)$

iii. $E(bx^a) = a$

Απόδειξη.

i. $E(a) = \dfrac{x}{a} \cdot a' = 0$

ii. $E\big(af(x)\big) = \dfrac{x}{af(x)}[af(x)]' = \dfrac{x}{af(x)}af'(x) = Ef(x)$

iii. $E(bx^a) = \dfrac{x}{bx^a}(bx^a)' = \dfrac{x}{bx^a}abx^{a-1} = a\dfrac{bx^a}{bx^a} = a$

Πρόταση 6.4. (Την αντιμετωπίζουμε σαν απλή άσκηση) *Αν $f(x)$ μια παραγωγίσιμη* *συνάρτηση και* $A(x) = \frac{f(x)}{x}$, *τότε*

$$Ef(x) = EA(x) + 1$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας στον τύπο της ελαστικότητας την $f(x)$ με $xA(x)$ έχουμε:

$$Ef(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{xA(x)}[xA(x)]' = \frac{1}{A(x)}\left[xA'(x) + A(x)\right] =$$

$$= \frac{x}{A(x)} A'(x) + 1 = EA(x) + 1$$

Ασκήσεις:

5. Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι

$$q_d(p) = 25 + 0{,}3p - 0{,}2p^2$$

και η συνάρτηση προσφοράς

$$q_s(p) = -5 + 2p - 0{,}01p^2$$

Να βρεθούν:

i. η ελαστικότητα ζήτησης και η ελαστικότητα προσφοράς.

ii. η τιμή της ελαστικότητας ζήτησης και της ελαστικότητας προσφοράς στο σημείο ισορροπίας.

$$-0.19p^2 - 1.7p + 30 = 0$$

$q_d\left(\frac{5\sqrt{2569}-85}{19}\right)$=11.94

$q_s\left(\frac{5\sqrt{2569}-85}{19}\right)$=11.94

$$\varepsilon_d(p) = \frac{0.3p - 0.4p^2}{q_d(p)} \Longrightarrow \varepsilon_d\left(\frac{5\sqrt{2569}-85}{19}\right) = \frac{-28.73}{11.94} = -2.4062$$

$$\varepsilon_S(p) = \frac{2p - 0.02p^2}{q_s(p)} \Longrightarrow \varepsilon_s\left(\frac{5\sqrt{2569} - 85}{19}\right) = \frac{16.158}{11.94} = 1.3532$$

Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις-παραδείγματα του βιβλίου για εξάσκηση.

Παράδειγμα 3.3.
Παράδειγμα 5.3.

Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1.
Άσκηση 2.
Άσκηση 4.

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου XIII*)

***Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις**

$$p = \frac{5\sqrt{2569} - 85}{19} \approx 8.86455$$

$$p = \frac{-5\sqrt{2569} - 85}{19} \approx -17.81192$$