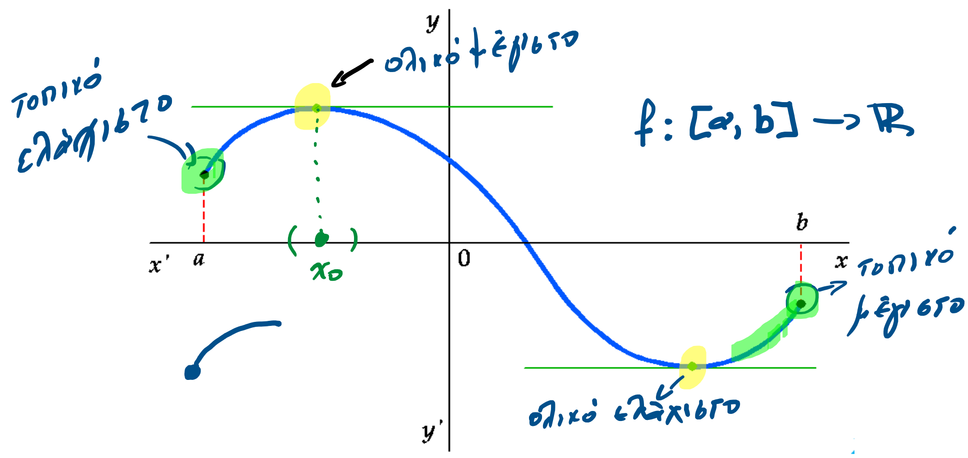
Θεμελιώδη Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού - Κεφάλαιο VI

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3
Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874

Ημερομηνία διάλεξης: 10-10-2024

Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο VI) :

Ορισμός 1.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και x_o εσωτερικό σημείο του A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** (αντίστοιχα **τοπικό ελάχιστο)** στο x_o, αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_o)$ (αντίστοιχα $f(x) \geq f(x_o)$) για κάθε $x \in A \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$. Θα λέμε ακόμη ότι η f παρουσιάζει σε ένα σημείο **τοπικό ακρότατο**, όταν η f έχει στο σημείο αυτό τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

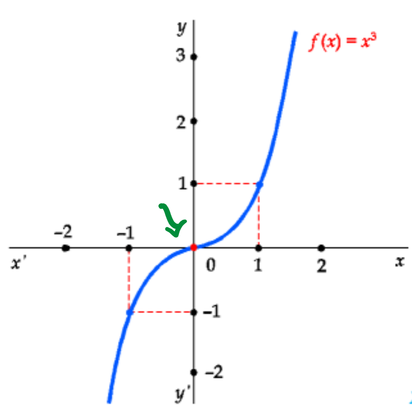


Θεώρημα 1.1. (*Θεώρημα του Fermat*) *Αν για την συνάρτηση $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, το $x_o \in (a, b)$ είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε*

$$f'(x_o) = 0$$

Παρατηρήσεις για το Θεώρημα του Fermat

► ***Το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει***, *δηλαδή αν μηδενίζεται η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, δεν έπεται ότι στο σημείο αυτό υπάρχει ακρότατο. Για παράδειγμα θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, η γραφική παράσταση της οποίας απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.*



$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

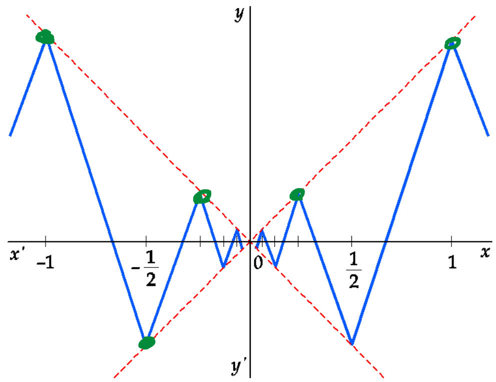
$3x^2 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x = 0}$

Η συνάρτηση αυτή έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$. Η $f'(x)$ μηδενίζεται για $x = 0$, καθώς

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Όμως η f δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στο σημείο αυτό, γιατί για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) = x^3 < 0$, ενώ για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = x^3 > 0$.

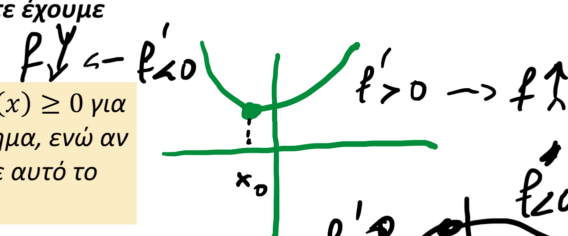
► ***Μια συνάρτηση μπορεί να έχει τοπικά μέγιστα ή τοπικά ελάχιστα χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.*** *Το παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι σχεδιασμένο στο επόμενο σχήμα.*



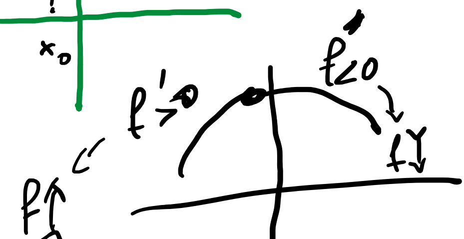
*Έτσι, όταν η παράγωγος δεν υπάρχει σε κάποιο σημείο x_o, αλλά υπάρχει στα γειτονικά του σημεία, τότε η παράγωγος ονομάζεται ασυνεχής και το x_o συγκαταλέγεται στα **κρίσιμα σημεία** της συνάρτησης, δηλαδή, στα σημεία εκείνα, στα οποία πιθανολογείται η ύπαρξη ακροτάτου.*

Συνεπώς:

***Για να ανακαλύψουμε τα ακρότατα σημεία μιας συνάρτησης,* βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης, δηλαδή τα σημεία στα οποία η παράγωγός της μηδενίζεται ή είναι ασυνεχής και εξετάζουμε καθένα ξεχωριστά, αν είναι μέγιστο ή ελάχιστο. Εάν, πριν και μετά το κρίσιμο σημείο έχουμε εναλλαγή της μονοτονίας τότε έχουμε ακρότατο (κριτήριο 1ης παραγώγου).**



Πόρισμα 3.4. *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη σε ένα διάστημα και $f'(x) \geq 0$ για κάθε x από το διάστημα αυτό, τότε η $f(x)$ είναι αύξουσα σε αυτό το διάστημα, ενώ αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε x από το διάστημα αυτό, τότε η $f(x)$ είναι φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.*



Πόρισμα 3.5. (Κριτήριο της 2ης παραγώγου) *Αν μία συνάρτηση f έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο σε ένα σημείο a του πεδίου ορισμού της και $f'(a) = 0$, τότε*

i. *αν $f''(a) > 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο a*

ii. *αν $f''(a) < 0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο a*

Παραδείγματα - Ασκήσεις:

(Θα επανέλθουμε σε τέτοιες ασκήσεις στη συνέχεια όταν θα μιλήσουμε για σημεία καμπής)

►Άσκηση 1.2.(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου VI)

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$\boxed{f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}}$$

$(\sqrt[3]{x^2})' = (x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Λύση. *Η δοθείσα συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η παράγωγός της είναι:*

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Π.Ο. f, $A_f = \mathbb{R}$

Π.Ο. f', $A_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Τα κρίσιμα σημεία είναι:

(i) οι ρίζες της $f'(x)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

(ii) τα σημεία ασυνέχειας της $f'(x)$: $3\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Σημειώστε βεβαίως ότι στο σημείο $x = 0$, η $f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής. ◄

►Παράδειγμα 3.7. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$. S.O.S.

Λύση. Στην Άσκηση 1.2 είχαμε βρει ότι τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$ είναι:

i. οι ρίζες της $f'(x)$: $5x-2=0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

ii. τα σημεία ασυνέχειας της $f'(x)$:

$$3\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Πρέπει λοιπόν να ελέγξουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης στα δύο αυτά κρίσιμα σημεία. Για τον σκοπό αυτό εξετάζουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου. Κατά σειρά έχουμε:

$$f'(x) > 0 \text{ ή } \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \text{ ή } \sqrt[3]{x}(5x-2) > 0$$

$$\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Συνεπώς καταρτίζεται ο επόμενος πίνακας:

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$\sqrt[3]{x}$	$-$	$+$	$+$	
$5x-2$	$-$	$-$	$+$	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	↗	↘	↗	

Επομένως στο $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(0) = 0$ ενώ στο $x = \frac{2}{5}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος. ◄