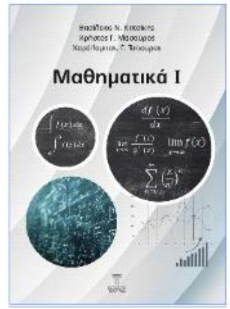
Θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού - Κεφάλαιο X

Ημερομηνία διάλεξης: 7-11-2024



Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874

Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο X) :

4. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη για όλες τις τιμές του x, όταν $a \leq x < +\infty$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx$$

υπάρχει και η συνάρτηση $I(b)$ είναι «καλά ορισμένη» για κάθε $b > a$. Είναι προφανές να αναρωτηθούμε τι συμβαίνει όταν $b \to +\infty$.

Ορισμός 4.1. Αν το όριο

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε αυτό καλείται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(a, +\infty)$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Δηλαδή, με βάση τον ορισμό που μόλις δώσαμε, έχουμε ότι

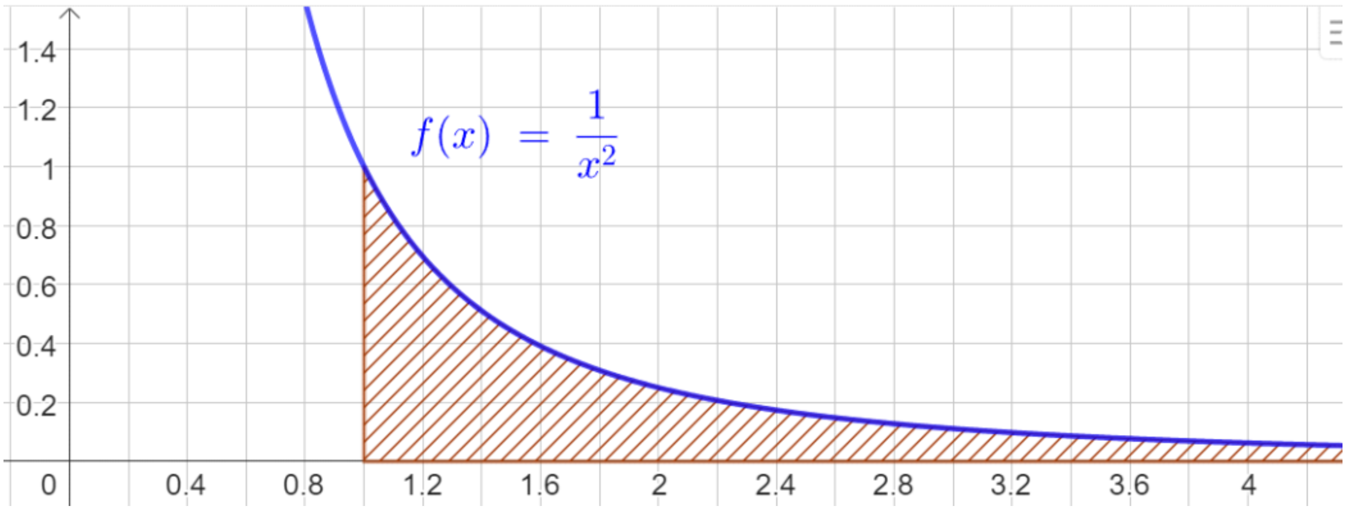
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Αν το όριο στον ορισμού 4.1 υπάρχει και είναι πεπερασμένο, συνηθίζουμε να λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι αποκλίνει.

►**Παράδειγμα 4.1.** Θα αποδείξουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

Πράγματι,

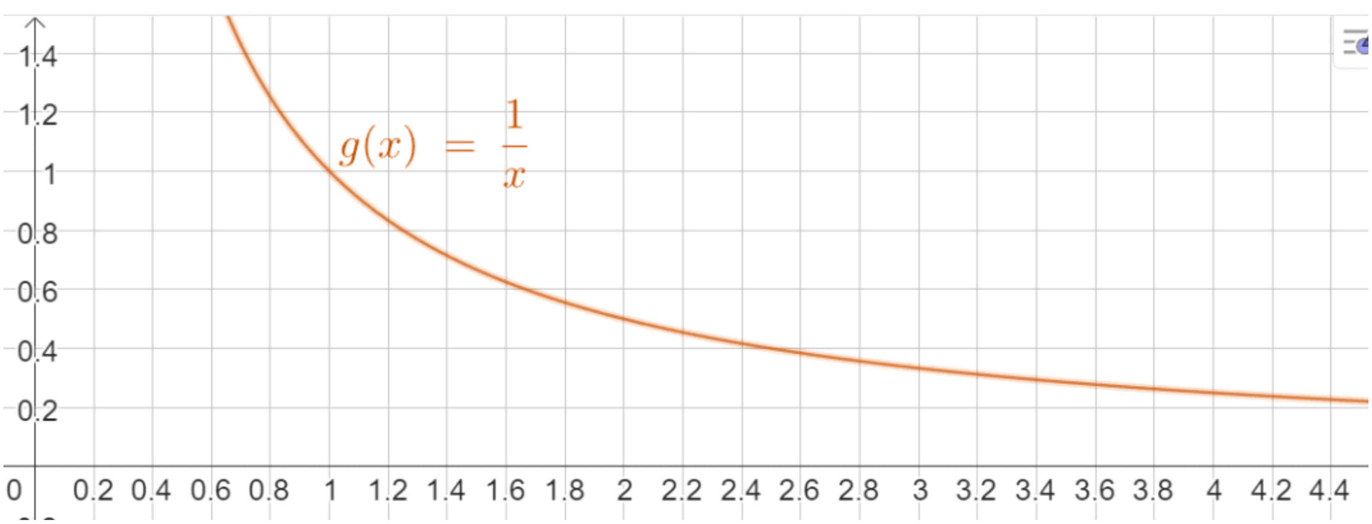
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{b} - 1\right] = 1$$

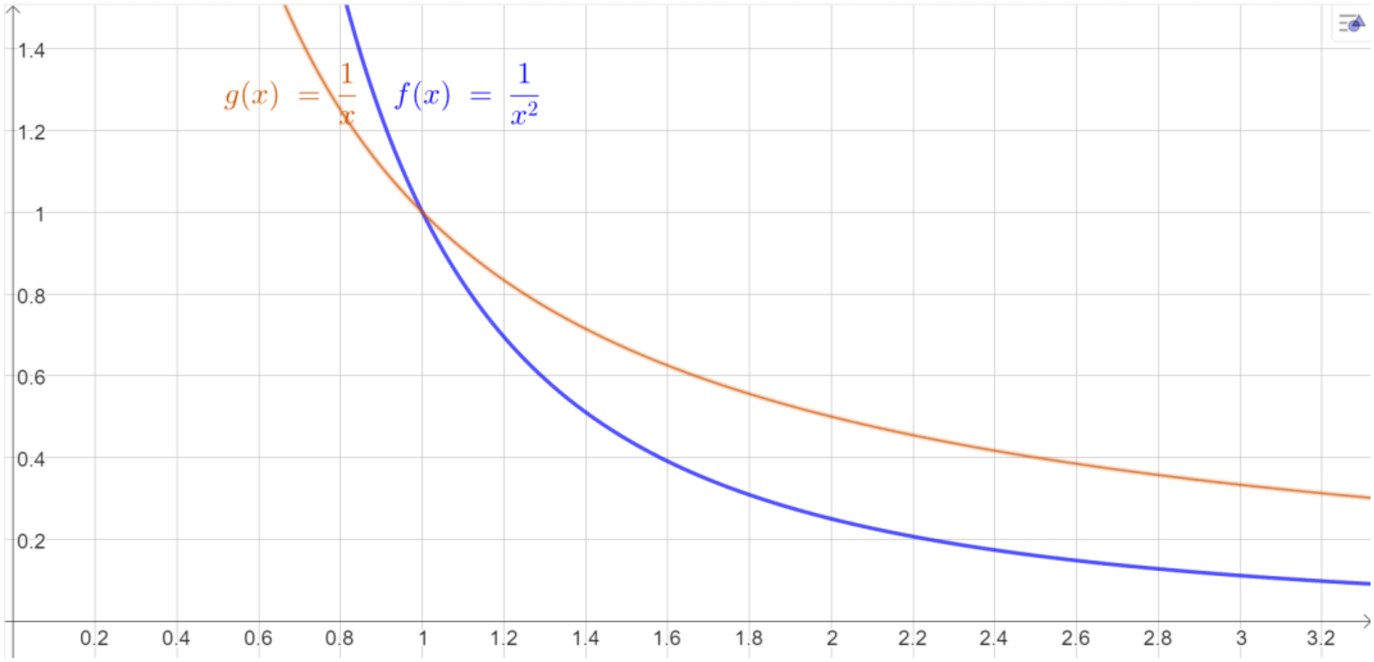


►**Παράδειγμα 4.2.** Θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} ln\, x \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} (b - 0) = +\infty$$





►**Παράδειγμα 4.3**. Μετά τα δύο παραπάνω παραδείγματα ας εξετάσουμε γενικά τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

Την απάντηση για $p = 1$ μας την δίνει το παράδειγμα 4.2. Έτσι ας υποθέσουμε ότι $p \neq 1$.

Τότε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{1-p}\left(b^{-p+1} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, p > 1 \\ +\infty, p < 1 \end{cases}$$

Κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα συγκλίνει στην τιμή $\frac{1}{p-1}$, αν $p > 1$, ενώ αποκλίνει αν $p < 1$. Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ αποτελεί το «σύνορο» μεταξύ συγκλίνουσας και αποκλίνουσας συμπεριφοράς των γενικευμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$. Αντίστοιχος είναι και ο ορισμός του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^b f(x) dx$:

Ορισμός 4.2. Αν το όριο

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε αυτό καλείται γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(-\infty, b)$ και συμβολίζεται με

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

Δηλαδή, με βάση τον ορισμό 4.2, έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Ένα άλλο είδος γενικευμένου ολοκληρώματος ορίζεται με έναν όχι τόσο προφανή τρόπο:

Ορισμός 4.3. Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx \quad \text{και} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

υπάρχουν, τότε ορίζουμε

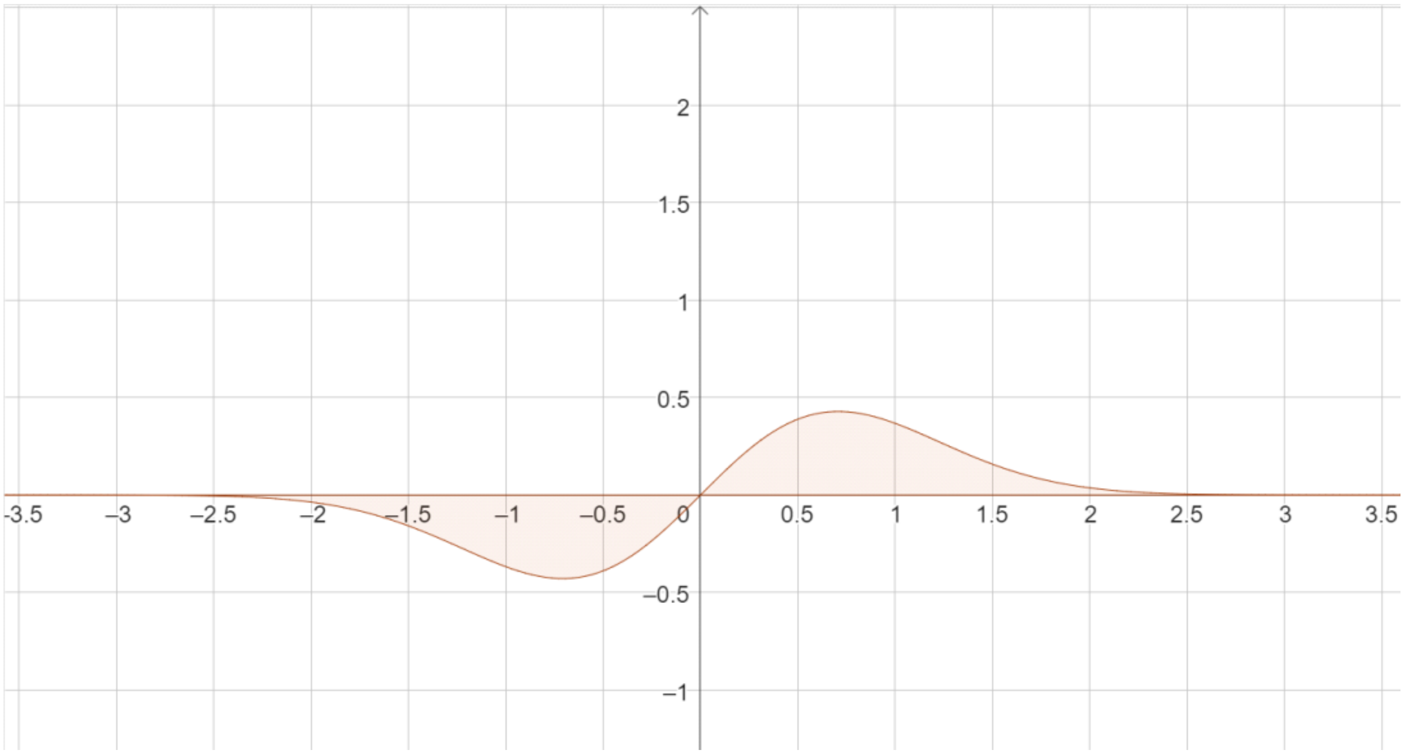
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

- **Το γενικευμένο ολοκλήρωμα του ορισμού 4.3 λέμε ότι συγκλίνει, αν αμφότερα τα**
  $$\int_{-\infty}^0 f(x)dx \text{ και } \int_0^{+\infty} f(x)dx$$
  συγκλίνουν.

- Το σημείο 0 έχει ληφθεί ενδεικτικά. Θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$. Σημασία έχει η ιδέα που κρύβεται πίσω από τον ορισμό αυτό: το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ υπάρχει, εφόσον υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(x)$ στα διαστήματα $(-\infty, c)$ και $(c, +\infty)$.

►**Παράδειγμα:** Να εξεταστεί αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα, θεωρώντας ενδιάμεσα σημεία αρχικά το c=0 και στη συνέχεια το c=1 (θα πρέπει να διαπιστώσουμε το ίδιο αποτέλεσμα):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2}\, dx$$



Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε το παρακάτω λυμένο παράδειγμα του βιβλίου για εξάσκηση.

►Παράδειγμα 4.4. Θα αποδείξουμε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx = 2$.

Πράγματι,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-\frac{x}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^b = -2\lim_{b\to+\infty}\left[e^{-\frac{b}{2}} - 1\right] = 2$$