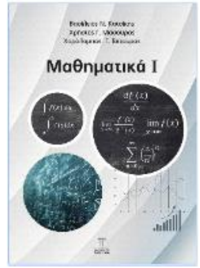
Κανόνας de l'Hôpital - Κεφάλαιο VI



Ημερομηνία διάλεξης: 17-10-2024

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874

Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο VI) :

5. Ο Κανόνας του de l'Hôpital

Θεώρημα 5.1. *Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι*

- *συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a, b]$*
- *παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (a, b)*
- *και $f(a) = g(a) = 0$*

Τότε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ και μάλιστα:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παραδείγματα - Ασκήσεις:

▶ Παράδειγμα 5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5}{3}$ ◀

▶ Παράδειγμα 5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1$ ◀

▶ Παράδειγμα 5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{[e^x - e^{-x} - 2x]'}{(x - \sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[e^x + e^{-x} - 2]'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Όπως παρατηρείτε σε αυτό το παράδειγμα εφαρμόσαμε 3 φορές το θεώρημα 5.1, διότι εμφανιζόταν κατ' επανάληψη η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Σχόλιο 5.3. Το θεώρημα 5.1. ισχύει και όταν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

▶ Παράδειγμα 5.4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{k}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{k\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{k}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = k\lim_{x\to\infty}\cos\frac{k}{x} = k$$ ◀

Θεώρημα 5.2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, διαφορίσιμες και $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο x της περιοχής ενός σημείου a, εκτός ενδεχομένως από το ίδιο το a.*

Αν

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *και* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

εφόσον το όριο του δευτέρου μέρους, πεπερασμένο ή άπειρο, υπάρχει.

Σχόλιο 5.4. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που $x \to \infty$. Πράγματι, αν

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

και το όριο $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει, τότε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

▶ Παράδειγμα 5.5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$ ◀

▶ Παράδειγμα 5.6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$ ◀

▶ Παράδειγμα 5.7. $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2+d} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(ax^2+b\right)'}{(cx^2+d)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$ ◀

► Άσκηση 5.1. **(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου VI)**

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}$, $a\in\mathbb{R}$

Λύση. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 1}(x^a-1)=0$ και $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$.

Επομένως

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^a-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{ax^{a-1}}{1}=a \blacktriangleleft$$

► Άσκηση 5.2. **(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου V)**

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}$

Λύση. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0}(\cos 3x-1)=0$ και $\lim_{x\to 0}x^2=0$.

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 3x}{2x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

Όμως $\lim_{x\to 0}\sin 3x=0$ και $\lim_{x\to 0}x=0$, επομένως επαναλαμβάνουμε τον κανόνα de l'Hôpital και έχουμε:

$$-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{x'}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1}=-\frac{9}{2} \blacktriangleleft$$

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου VI*)

***Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις**

15. Βρείτε τα παρακάτω όρια εφαρμόζοντας τον κανόνα του de l'Hôpital:

i. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$ **ii.** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις-παραδείγματα του βιβλίου για εξάσκηση.

▶**Άσκηση 5.3.** Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}{\ln(\sin 2x)}$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}-\sin x-\cos x\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

και $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2x)=\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=\ln 1=0.$

Επομένως

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}{\ln(\sin 2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\sqrt{2}-\sin x-\cos x\right)'}{[\ln(\sin 2x)]'}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos x+\sin x}{\frac{(\sin 2x)'}{\sin 2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos x+\sin x}{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos x+\sin x}{2\cot 2x}$$

Όμως

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x+\sin x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

και $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$

Επομένως επαναλαμβάνουμε τον κανόνα του de l'Hôpital και έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos x+\sin x}{2\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(-\cos x+\sin x)'}{2(\cot 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cot x}{2\left(-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{4} sin^2 2x\,(sin\,x + cot\,x)\right] = -\frac{1}{4}\cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) \blacktriangleleft$$

►**Άσκηση 5.5.** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+e^x)}{x}$

Λύση. Παρατηρούμε ότι το όριο τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή είναι το $+\infty$. Επομένως εφαρμόζοντας τον κανόνα του de l'Hôpital έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[ln(1+e^x)]'}{x'} = \frac{\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$$

Συναντάμε και πάλι απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ οπότε και πάλι προσφεύγουμε στον κανόνα του de l'Hôpital και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(1+e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \blacktriangleleft$$