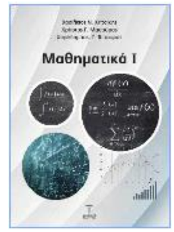
Μελέτη Συνάρτησης - Κεφάλαιο VIII

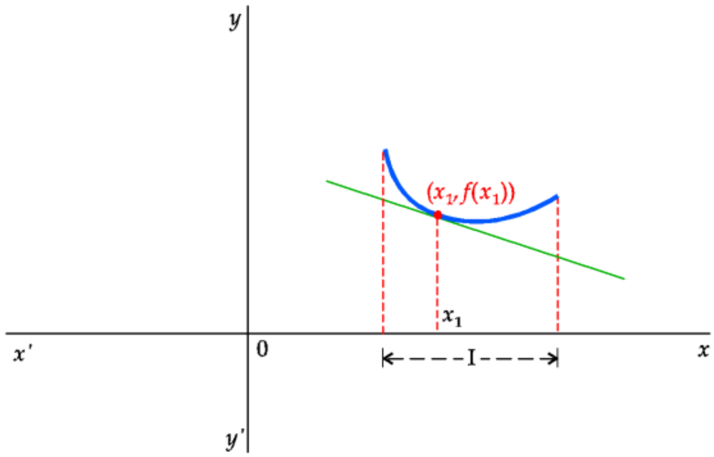
Σύγγραμμα: Μαθηματικά I, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3
Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



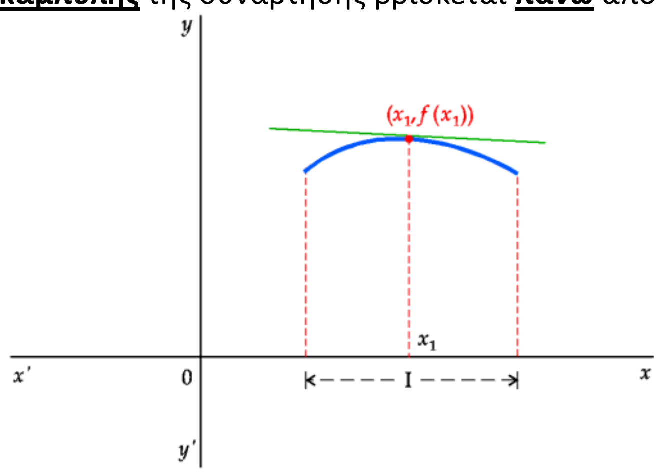
Ημερομηνία διάλεξης: 10-10-2024

Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο VIII) :

- Μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I **λέγεται *κυρτή* στο I** αν η εφαπτομένη **σε κάθε σημείο της καμπύλης** της συνάρτησης βρίσκεται **κάτω** από αυτήν.



- Μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I **λέγεται *κοίλη* στο I** αν η εφαπτομένη **σε κάθε σημείο της καμπύλης** της συνάρτησης βρίσκεται **πάνω** από αυτήν.

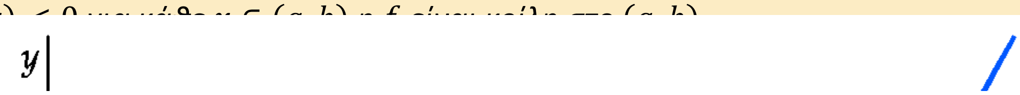


Ορισμός 1.3. Για μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) θα λέμε ότι το σημείο $x_o \in (a, b)$ αποτελεί **σημείο καμπής**, αν υπάρχουν διαστήματα $(x_o - \delta, x_o)$, $(x_o, x_o + \delta)$ όπου η f είναι κυρτή στο $(x_o - \delta, x_o)$ και κοίλη στο $(x_o, x_o + \delta)$ ή το αντίστροφο, κοίλη στο $(x_o - \delta, x_o)$ και κυρτή στο $(x_o, x_o + \delta)$.

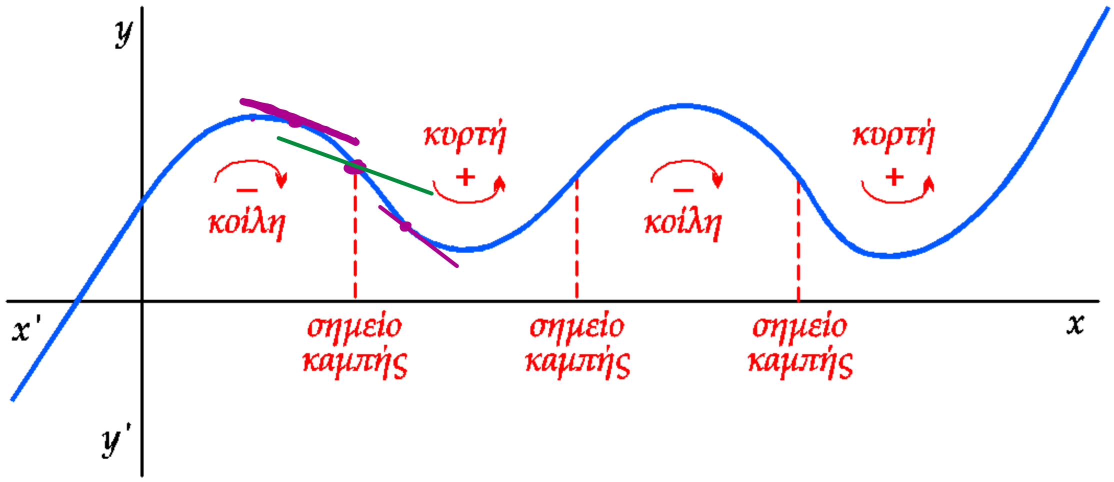
Πρόταση 1.1. *Αν μία συνάρτηση $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, b), τότε ισχύουν:*

i. *αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ η f είναι κυρτή στο (a, b)*

ii. [illegible]



ii.



Πόρισμα 1.1. *Αν μία συνάρτηση $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο συνεχή σε κάθε σημείο του διαστήματος (a,b), και στο $\xi \in (a,b)$ παρουσιάζει σημείο καμπής, τότε $f''(\xi) = 0$.*

Πρόταση 1.3. (Κριτήριο ν-οστής παραγώγου) *Αν μία συνάρτηση $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι ν τάξης, και για ένα $\xi \in (a,b)$, έχουμε:*

$$f'(\xi) = f''(\xi) = \cdots = f^{(\nu-1)}(\xi) = 0 \ \text{και} \ f^{(\nu)}(\xi) \neq 0$$

τότε:

i. *Αν ν άρτιος με $f^{(\nu)}(\xi) < 0$ η f παρουσιάζει μέγιστο*

ii. *Αν ν άρτιος με $f^{(\nu)}(\xi) > 0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο*

iii. *Αν ν περιττός τότε το ξ είναι σημείο καμπής*

►**Παράδειγμα 1.1.** Για τη συνάρτηση $\mathrm{f(x) = x^5}$ έχουμε:

$f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$ και $f^{(5)}(x) = 120$

Επομένως

$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ και $f^{(5)}(0) \neq 0$

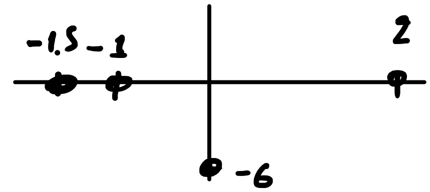
Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο 0. ◄

Ασκήσεις:

►**Άσκηση 1.** ***(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου VIII)*** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$

Λύση. Η $f(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, συνεπώς ορίζεται σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και είναι συνεχής σε αυτό.

✓ ***Σημεία τομής με τους άξονες:*** Τα σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα των $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $y=0$; $f(x)=0$



$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0,$

απ' όπου:

$x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -1$, και $x_3 = 2$. $\rightarrow x=0$

Η τεταγμένη του σημείου τομής της καμπύλης με τον άξονα των $y'y$ είναι: $y = f(0) = -6$

✓ ***Ακρότατα σημεία:*** Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$f'(x) = \left(2x^3 + x^2 - 7x - 6\right)' = 6x^2 + 2x - 7$

Η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ είναι:

$f''(x) = \left(6x^2 + 2x - 7\right)' = 12x + 2$

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι:

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-1-\sqrt{43}}{6} \approx -1.26 \\ \rho_2 = \dfrac{-1+\sqrt{43}}{6} \approx 0.93 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου έχουμε:

$$f''(\rho_1) = f''\left(\frac{-1-\sqrt{43}}{6}\right) = -\boxed{2\sqrt{43}} < 0$$ $f''<0 \rightsquigarrow$ T.M.

$$f''(\rho_2) = f''\left(\frac{-1+\sqrt{43}}{6}\right) = \boxed{2\sqrt{43}} > 0$$ $f''>0 \rightsquigarrow$ T.E.

Επομένως η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο ρ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ρ_2. Για να υπολογίσουμε το τοπικό μέγιστο θέτουμε την τιμή $\rho_1 = \frac{-1-\sqrt{43}}{6}$ στην συνάρτηση $f(x)$ και έχουμε:

$$y_\mu = f\left(\frac{-1-\sqrt{43}}{6}\right) = \frac{1}{54}\left(-260 + 43\sqrt{43}\right)$$

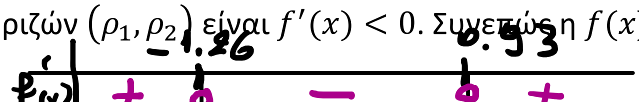
Όμοια για να υπολογίσουμε το τοπικό ελάχιστο θέτουμε την τιμή $\rho_2 = \frac{-1+\sqrt{43}}{6}$ στην συνάρτηση $f(x)$ και έχουμε:

$$y_\varepsilon = f\left(\frac{-1+\sqrt{43}}{6}\right) = \frac{1}{54}\left(-260 - 43\sqrt{43}\right)$$

7°

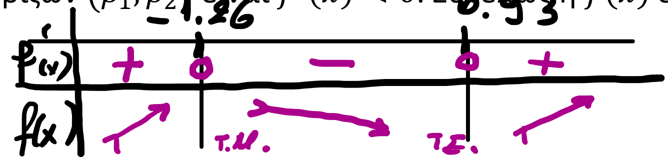
✓ ***Η μονοτονία της καμπύλης:*** Η $f'(x) = 6x^2 + 2x - 7$ είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα θετική $\left(\Delta = 2\sqrt{43} > 0\right)$ και συντελεστή του δευτεροβαθμίου όρου θετικό αριθμό $(a = 6 > 0)$. Άρα:

- Για κάθε x εντός του διαστήματος των ριζών (ρ_1, ρ_2) είναι $f'(x) < 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα



- Για κάθε x εντός του διαστήματος των ριζών (ρ_1, ρ_2) είναι $f'(x) < 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα

$$\left(\frac{-1-\sqrt{43}}{6}, \frac{-1+\sqrt{43}}{6}\right)$$



- Για κάθε x εκτός του διαστήματος των ριζών (ρ_1, ρ_2) είναι $f'(x) > 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι αύξουσα στην ένωση των διαστημάτων:

$$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{43}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{43}}{6}, +\infty\right)$$

✓ ***Σημεία καμπής:*** Η καμπύλη έχει σημείο καμπής για τιμές για τις οποίες ισχύει:

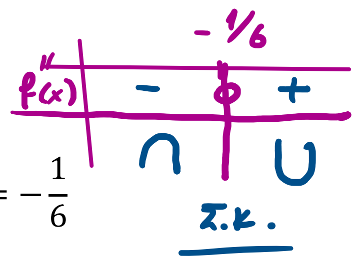
$f''(x) = 0 \quad$ και $\quad f'''(x) \neq 0$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$f''(x) = 12x + 2$

Επομένως:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$$



Εξάλλου

$f'''(x) = (12x + 2)' = 12 \neq 0$.

Επομένως η καμπύλη στο σημείο $x = -\frac{1}{6}$ παρουσιάζει σημείο καμπής. Η τιμή της συνάρτησης στο σημείο καμπής είναι

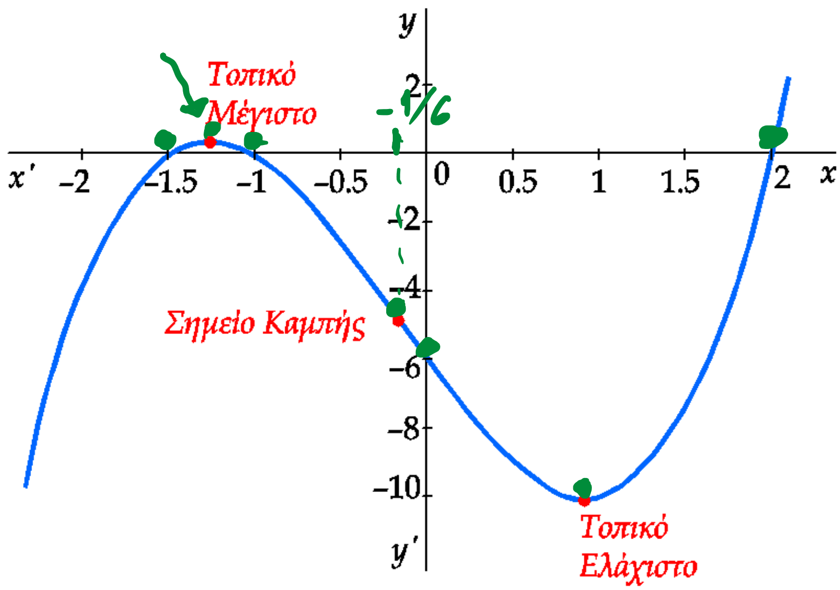
$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{130}{27} \approx -4{,}81$$

Επιπλέον

$$12x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{6}$$

Επομένως η δεύτερη παράγωγος είναι θετική στο διάστημα $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$ και αρνητική στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$. Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$.

Ολοκληρώθηκε πλέον η μελέτη της συνάρτησής μας και είμαστε τώρα έτοιμοι να χαράξουμε την καμπύλη της:



Ημερομηνία διάλεξης: 17-10-2024

►**Άσκηση 2.** ***(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου VIII)*** Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση:

$f(x) = x^3 - 3x^2$

Λύση. Η $f(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση. Συνεπώς ορίζεται σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και είναι συνεχής σε αυτό.

Τα κοινά σημεία της γραφικής παράσταση της συνάρτησης με τον άξονα των τετμημένων, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, επομένως:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$

Συνεπώς:

$$x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Επομένως τα κοινά σημεία της καμπύλης με τον άξονα $x'x$ είναι τα $x = 0$ και $x = 3$. Επιπλέον, καθώς $f(0) = 0$, συνάγουμε ότι η καμπύλη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

✓ ***Ακρότατα σημεία - Μονοτονία***: Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2\right)' = 3x^2 - 6x$$

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι:

$$3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = 0 \\ \rho_2 = 2 \end{cases}$$

Η πρώτη παράγωγος είναι τριώνυμο με δύο πραγματικές ρίζες και θετικό τον συντελεστή του δευτεροβαθμίου όρου. Επομένως:

- Για κάθε x εντός του διαστήματος των ριζών (ρ_1, ρ_2) είναι $f'(x) < 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0,2)$
- Για κάθε x εκτός του διαστήματος των ριζών (ρ_1, ρ_2) είναι $f'(x) > 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(2, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο 0 και τοπικό ελάχιστο στο σημείο 2. Για να βρούμε ποιο είναι το τοπικό μέγιστο θέτουμε στη συνάρτηση $x = 0$ και έχουμε ότι $f(0) = 0$. Επίσης για να βρούμε ποιο είναι το τοπικό ελάχιστο ομοίως θέτουμε στη συνάρτηση την τιμή $x = 2$ και βρίσκουμε ότι $f(2) = -4$.

✓ ***Σημεία καμπής:*** Η καμπύλη έχει σημείο καμπής για τιμές για τις οποίες ισχύει:

$f''(x) = 0 \quad$ και $\quad f'''(x) \neq 0$

Η δεύτερη παράγωγος είναι:

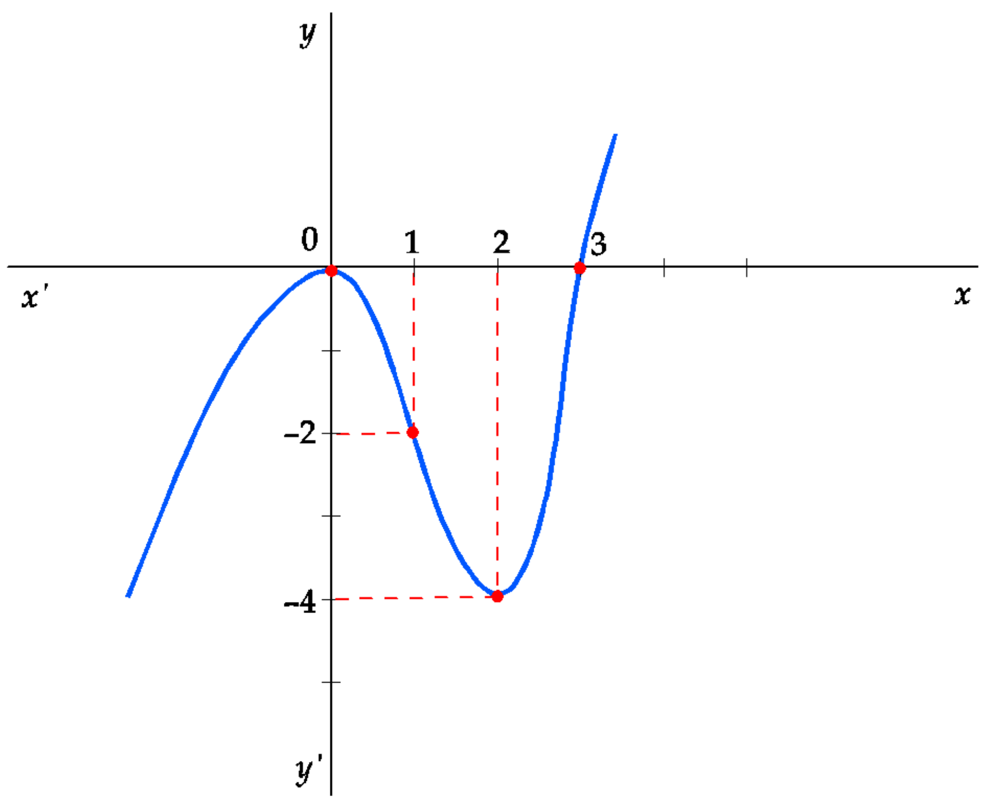
$f''(x) = 6x - 6$

Επομένως: $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Εξάλλου $f'''(x) = (6x - 6)' = 6 \neq 0$. Κατά συνέπεια η καμπύλη στο σημείο $x = 1$ παρουσιάζει σημείο καμπής. Η τιμή της συνάρτησης στο σημείο καμπής είναι $f(1) = -2$. Επιπλέον:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$.



(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου VIII*)

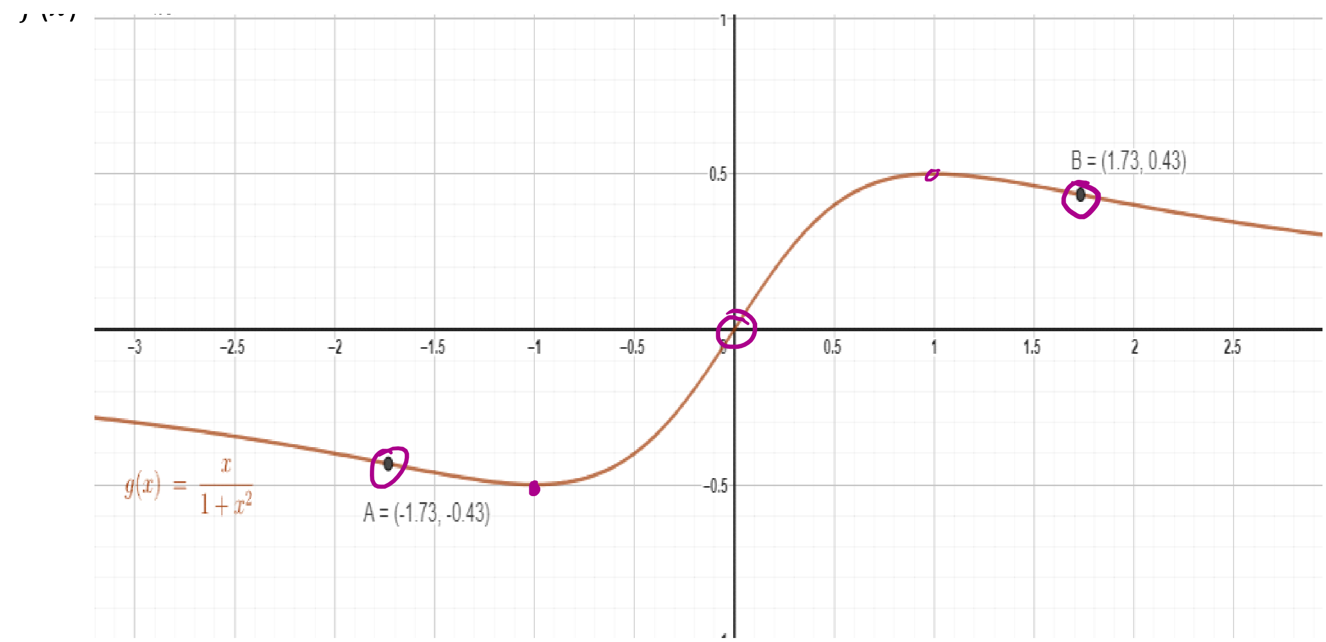
***Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις**

9. Ελέγξτε για ακρότατα την συνάρτηση: → Λύση στις χειρόγραφες σημειώσεις

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

10. Βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$f(x) = \frac{x}{\ldots}$



Εργασία για το σπίτι: **Λύνουμε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις-παραδείγματα του βιβλίου για εξάσκηση.**

►**Άσκηση 3.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2$$

Λύση. Η $f(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση. Συνεπώς ορίζεται σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και είναι συνεχής σε αυτό.

Τα κοινά σημεία της γραφικής παράσταση της συνάρτηση με τον άξονα των τετμημένων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, επομένως:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 0 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

✓ *Ακρότατα σημεία - Μονοτονία*: Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)' = x^2 + 4x$$

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι:

$$x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = 0 \\ \rho_2 = -4 \end{cases}$$

Καθώς η πρώτη παράγωγος είναι τριώνυμο, είναι γνωστό από τη θεωρία του τριωνύμου ότι όταν το x λαμβάνει τιμές εντός του διαστήματος των ριζών, αυτό γίνεται ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβαθμίου του όρου, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση γίνεται αρνητικό στο διάστημα $(-4,0)$, ενώ όταν το x λαμβάνει τιμές στα διαστήματα εκτός των ριζών, αυτό γίνεται ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβαθμίου του όρου, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση στα διαστήματα $(-\infty,-4)$ και $(0,+\infty)$ γίνεται θετικό. Επομένως η συνάρτηση είναι αύξουσα στο $(-\infty,-4)$, φθίνουσα στο $(-4,0)$ και πάλι αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Συνεπώς στο -4 η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, και στο 0 τοπικό ελάχιστο. Το τοπικό μέγιστο είναι $f(-4)=\frac{32}{3}$ και το τοπικό ελάχιστο $f(0)=0$.

✓ *Σημεία καμπής*: Η δεύτερη παράγωγος είναι:

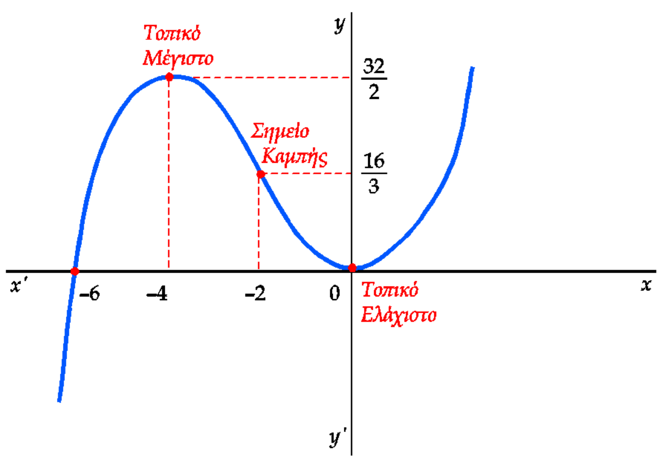
$f''(x)=\left(x^2+4x\right)'=2x+4$

Παρατηρούμε ότι:

$2x+4>0 \Leftrightarrow x>-2$

Επομένως η f'' γίνεται αρνητική στο διάστημα $(-\infty,-2)$, θετική στο $(-2,+\infty)$ και μηδενίζεται στο -2. Επομένως η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-2)$, κυρτή στο διάστημα $(-2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $x=-2$. Η τιμή της συνάρτησης στο σημείο καμπής της είναι $f(-2)=\frac{16}{3}$.

Μετά από όλη αυτή την ανάλυση μπορούμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη της συνάρτησης.



►**Άσκηση 4.** Να μελετηθεί και να σχεδιασθεί η καμπύλη της συνάρτησης:

$f(x)=x^3-x^2+x-1$

Λύση. Η $f(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση. Συνεπώς ορίζεται σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και είναι συνεχής σε αυτό.

Τα κοινά σημεία της γραφικής παράσταση της συνάρτησης με τον άξονα των τετμημένων, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, επομένως:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2+x-1=0$

Συνεπώς:

$x^3-x^2+x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \ x=1$

Επομένως το μοναδικό κοινό σημείο της καμπύλης με τον άξονα $x'x$ είναι το $x=1$. Όσον αφορά τον άξονα των τεταγμένων, η καμπύλη τον τέμνει στην θέση $f(0)=-1$.

✓ *Ακρότατα σημεία - Μονοτονία*: Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης

$f'(x)=\left(x^3-x^2+x-1\right)'=3x^2-2x+1$

Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε σε ένα τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα. Από τη θεωρία του τριωνύμου γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο είναι πάντοτε ομόσημο με τον συντελεστή του δευτεροβαθμίου όρου, δηλαδή με το 3, και επομένως είναι πάντα θετικό. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα και επομένως δεν έχει ακρότατα:

- ✓ *Σημεία καμπής*: Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$f''(x) = \left(3x^2 - 2x + 1\right)' = 6x - 2$

Αυτή είναι θετική όταν

$6x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$

Επομένως στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική και συνεπώς η συνάρτησή μας είναι κοίλη, στο διάστημα $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ η δεύτερη παράγωγος είναι θετική και συνεπώς η συνάρτησή μας είναι κυρτή και το σημείο $\left(\frac{1}{3}, -\frac{20}{27}\right)$ είναι σημείο καμπής. Ας δούμε τώρα το διάγραμμα της συνάρτησης που μελετήσαμε: