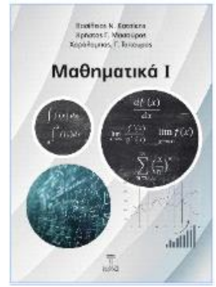
Η Παράγωγος - Κεφάλαιο V

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Ημερομηνία διάλεξης: 3-10-2024

Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο V) :

Έστω μια συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $x_o\in(a,b)$. Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) στο x_o αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) σε κάθε σημείο του διαστήματος (a,b), τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο διάστημα (a,b).

Θεώρημα 4.1. Αν μία συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του διαστήματος (a,b), τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο σημείο x_o.

5. Κανόνες παραγώγισης

Θεώρημα 5.1. *Αν οι $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_o\in(a,b)$, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:*

$$(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$$

Θεώρημα 5.2. *Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_o\in(a,b)$, και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση λf είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:*

$$(\lambda f)'(x_o)=\lambda f'(x_o)$$

Θεώρημα 5.3. *Αν οι $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_o\in(a,b)$, τότε το γινόμενό τους $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_o και ισχύει:*

$$(f\cdot g)'(x_o)=f'(x_o)\cdot g(x_o)+f(x_o)\cdot g'(x_o)$$

$$[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$$

Θεώρημα 5.4. *Αν οι $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_o\in(a,b)$, και επιπλέον $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε το πηλίκο τους $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_o και ισχύει:*

συνάρτηση στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)\cdot g(x_o) - f(x_o)\cdot g'(x_o)}{[g(x_o)]^2}$$

(κανόνας παραγώγισης σύνθεσης)

Θεώρημα 5.5. (κανόνας της αλυσίδας) *Αν η $f:(a,b)\to(c,d)$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_o \in (a,b)$, και η $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $f(x_o)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_o και ισχύει:*

$$(g\circ f)'(x_o) = g'\big(f(x_o)\big)f'(x_o)$$

e^x $\quad (e^{x^2+1})' = e^{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = e^{x^2+1}\cdot 2x$

Παραδείγματα - Ασκήσεις:

►***Παράδειγμα 4.9.*** *Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$, είναι συνεχής στο 0. Όμως η συνάρτηση αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Πράγματι:*

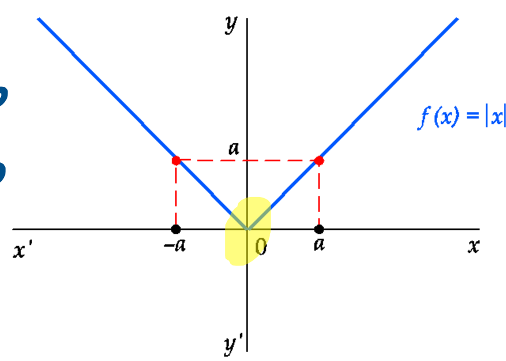
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{x} = 1$$

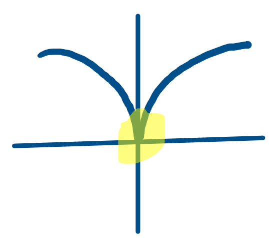
ενώ

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Επομένως το όριο $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει και συνεπώς η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$





Τύποι παραγώγων βασικών συναρτήσεων

$y = f(x)$

$y = c$		$y' = 0$
$y = x$		$y' = 1$
$y = x^n$	$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	$y' = nx^{n-1}$
$y = x^{-n}$	$\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$	$y' = -nx^{-n-1}$
$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$		$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$
$y = x^a$		$y' = ax^{a-1}$
$y = a^x$		$y' = a^x \ln a$ $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$
$y = e^x$	$f(x) = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$		$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	sinus = ημίτονο	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	cosinus = συνημίτονο	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	tangent = εφαπτομένη	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	cotangent = συνεφαπτομένη	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

►**Άσκηση 2.** **(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου V)** Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

$\boldsymbol{i}.\ f(x) = \frac{e^x}{3x^4} \qquad \boldsymbol{ii}.\ f(x) = \frac{e^{(8+x)^2}}{x^3}$

Λύση.

$(\boldsymbol{i})\ f'(x) = \left(\frac{e^x}{3x^4}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot 3x^4 - e^x (3x^4)'}{(3x^4)^2} = \frac{3x^4 e^x - 12x^3 e^x}{9x^8} =$

$\frac{3x^3 e^x (x-4)}{\ldots} = \boxed{\frac{e^x (x-4)}{\ldots}}$

$$(\boldsymbol{i})\ f'(x) = \left(\frac{}{3x^4}\right)' = \frac{}{\left(3x^4\right)^2} = \frac{}{9x^8} =$$

$$= \frac{3x^3e^x(x-4)}{9x^8} = \boxed{\frac{e^x(x-4)}{3x^5}}$$

$$(\boldsymbol{ii})\ f'(x) = \left[\frac{e^{(8+x)^2}}{x^3}\right]' = \frac{\left[e^{(8+x)^2}\right]' x^3 - e^{(8+x)^2}\left(x^3\right)'}{x^6} =$$

$$= \frac{e^{(8+x)^2}\left[(8+x)^2\right]' x^3 - e^{(8+x)^2}3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{e^{(8+x)^2}2(8+x)(8+x)'x^3 - 3x^2e^{(8+x)^2}}{x^6} =$$

$$= \frac{2x^3e^{(8+x)^2}(8+x) - 3x^2e^{(8+x)^2}}{x^6} = \frac{e^{(8+x)^2}\left[2(8+x)x - 3\right]}{x^4}$$

►**Άσκηση 8.** **(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου V)** Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

$\boldsymbol{i}.\ f(x) = ln\left(x^2+5\right)$ $\boldsymbol{ii}.\ f(x) = ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$

$\boldsymbol{iii}.\ f(x) = \left(x^2-1\right) ln\left(x^2+1\right)$

Λύση.

$$(i)\ f'(x) = \left[ln\left(x^2+5\right)\right]' = \frac{1}{x^2+5}\left(x^2+5\right)' = \frac{2x}{x^2+5}$$

$$(ii)\ f'(x) = \left[ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$(iii)\ \ f'(x) = \left[\left(x^2-1\right) ln\left(x^2+1\right)\right]' = \left(x^2-1\right)' ln\left(x^2+1\right) + \left(x^2-1\right)\left[ln\left(x^2+1\right)\right]'$$

$$= 2x\, ln\left(x^2+1\right) + \left(x^2-1\right)\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1} = 2x\, ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x\left(x^2-1\right)}{x^2+1} =$$

$$= 2x\left[ln\left(x^2+1\right) + \frac{x^2-1}{x^2+1}\right]$$

►Άσκηση 19. (Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου V)

Αν $x > 0$, *να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης* $f(x) = x^x$

Λύση.

S.O.S

$ln(x^x) = x\,ln\,x$

$h(x) = f(x)^{g(x)}$

Λογαριθμίζοντας έχουμε: $ln\,f(x) = x\,ln\,x$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της ισότητας λαμβάνουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x\,ln\,x)' = x'\,ln\,x + x(ln\,x)' = 1 \cdot ln\,x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\,x + 1$$

Άρα, $f'(x) = (ln\,x + 1)x^x$

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου V*)

***Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις**

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

14. $f(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}$

15. $f(x) = 3x^3\,ln\,x - x^3$

54. $f(x) = \left(\frac{sin\,x}{1+cos\,x}\right)^2$

59. $f(x) = x^{ln\,x}$

Εργασία για το σπίτι: **Λύνουμε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις-παραδείγματα του βιβλίου για εξάσκηση.**

►Παράδειγμα 6.2. Ομοίως για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης

$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

λαμβάνουμε τους λογαρίθμους αμφοτέρων των μελών και έχουμε:

$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln(\cos x)$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε:

$$\left[\ln f(x)\right]' = [\sin x \cdot \ln(\cos x)]' \text{ ή } \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}$$

Άρα

$$f'(x) = \left[\cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}\right](\cos x)^{\sin x} =$$

$$= [\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \tan x](\cos x)^{\sin x}.$$

►Άσκηση 5. Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$f(x) = (5x-3)^2$

Λύση. Είναι:

$$f'(x) = \left[(5x-3)^2\right]' = 2(5x-3)(5x-3)' = 2(5x-3)\cdot 5 = 10(5x-3)$$

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = [10(5x-3)]' = 10(5x-3)' = 10\cdot 5 = 50$$

►Άσκηση 6. Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$y = \sqrt{14-3x}, x \leq \dfrac{14}{3}$

Λύση. Η πρώτη παράγωγος είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{14-3x}\right)' = \frac{(14-3x)'}{2\sqrt{14-3x}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{14-3x}}$$

Επομένως:

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{14-3x}}\right]' = -\frac{3}{2}\left[-\frac{\sqrt{14-3x}}{14-3x}\right] =$$

$$= \frac{3}{2(14-3x)}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{14-3x}} = \frac{9}{4(14-3x)^{\frac{3}{2}}}\ .$$