$MC(10)$ $MR(10)$

►Άσκηση 6. Οι συναρτήσεις οριακού κόστους και οριακών εσόδων μιας επιχείρησης είναι:

$MC(q) = 20 + 12q(q^2 + 2)^2$ και $MR(q) = 2q^{-2} + 3q^{-1}$

αντίστοιχα, όπου $q \neq 0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι, όταν η επιχείρηση παράγει 3 μονάδες προϊόντος, το συνολικό κόστος παραγωγής ανέρχεται στις 2760 νομισματικές μονάδες, ενώ όταν η επιχείρηση πουλάει μια μονάδα προϊόντος τα συνολικά έσοδα ανέρχονται σε 10 νομισματικές μονάδες. Ζητούνται:

i. η συνάρτηση συνολικού και μέσου κόστους,

ii. η συνάρτηση συνολικών εσόδων, → Τιμή

iii. η συνάρτηση $P(q)$ της συγκεκριμένης επιχείρησης.

iv. αν η συνάρτηση οριακού εσόδου μιας επιχείρησης εξαρτάται από τον χρόνο και είναι $MR(t) = (t - 1)^2$ βρείτε τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης κατά τα 5 πρώτα έτη λειτουργίας της.

S.O.S.

$$TC(Q) = \int MC(Q)\,dQ = \int TC'(Q)\,dQ$$

$$TR(Q) = \int MR(Q)\,dQ = \int TR'(Q)\,dQ$$

$\boxed{TC(3) = 2760}$ $\boxed{TR(1) = 10}$

i) $TC(Q) = \int MC(Q)\,dQ = \int 20 + 12Q\underline{(Q^2+2)}^2\,dQ =$

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$= \int 20 + 12Q(Q^4 + 4Q^2 + 4)\,dQ = \int 20 + 12Q^5 + 48Q^3 + 48Q$

$= \int 20 + 12Q(Q^4+4Q^2+4)dQ = \int 20 + 12Q^5 + 48Q^3 + 48Q\,dQ$

$= 20Q + \cancel{12}\frac{Q^6}{\cancel{6}} + \cancel{48}\frac{Q^4}{\cancel{4}} + \cancel{48}\frac{Q^2}{\cancel{2}} + c$

$\Rightarrow \boxed{TC(Q) = 2Q^6 + 12Q^4 + 24Q^2 + 20Q + c}$

$\boxed{\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c}$

Αφού $TC(3) = 2760 \Rightarrow \underline{2 \cdot 3^6 + 12 \cdot 3^4 + 24 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3} + c = 2760$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{c = 54}$

Συνολικά, $\boxed{TC(Q) = 2Q^6 + 12Q^4 + 24Q^2 + 20Q + 54}$

<u>Μέσο κόστος</u>: $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} \Rightarrow$

$AC(Q) = \frac{2Q^6 + 12Q^4 + 24Q^2 + 20Q + 54}{Q} \Rightarrow$

$\boxed{AC(Q) = 2Q^5 + 12Q^3 + 24Q + 20 + \frac{54}{Q}}$

ii) $TR(Q) = \int MR(Q)dQ = \int 2Q^{-2} + 3Q^{-1} dQ$

$= 2\frac{Q^{-1}}{-1} + 3\ln Q + c \Rightarrow$

$\boxed{TR(Q) = -\frac{2}{Q} + 3\ln Q + c}$

$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$

$k \neq -1$

$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

Όμως, $TR(1) = 10$

0

Όμως, $TR(1) = 10$

$$TR(1) = -\frac{2}{1} + 3\cancel{\ln 1} + c \Rightarrow$$

$$10 = -2 + c \Rightarrow \boxed{c = 12}$$

Επομένως, $\boxed{TR(Q) = -\frac{2}{Q} + 3\ln Q + 12}$

iii) Γνωρίζουμε ότι $TR = P \cdot Q \Rightarrow$

$$P(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} \Rightarrow$$

$$P(Q) = \frac{-2/Q + 3\ln Q + 12}{Q} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(Q) = -\frac{2}{Q^2} + 3\frac{\ln Q}{Q} + \frac{12}{Q}}$$

αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης.

iv) $$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta = \underbrace{F(\beta) - F(\alpha)}$$

Μεταβολή της παράγουσας από $\underline{\alpha}$ ως $\underline{\beta}$ ή $\underline{\Delta F}$

Ζητάμε τα συνολικά έσοδα κατά τα πρώτα 5 χρόνια λειτουργίας της επιχείρησης ΔΛΔ

$$TR(5) - TR(0) = \Big[TR(t)\Big]^5 =$$

$$TR(5) - TR(0) = \left[TR(t)\right]_0^5 =$$

$$= \int_0^5 MR(t)\,dt = \int_0^5 (t-1)^2\,dt = \int_0^5 t^2 - 2t + 1\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} + t\right]_0^5 = \frac{5^3}{3} - 5^2 + 5 - 0 = \frac{65}{3}.$$

Άρα, συνολικά: $\Delta TR\Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta MR(t)\,dt$

ή $\Delta TC\Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta MC(t)\,dt$

Άσκηση 7. Αν η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι

$$MC(q) = -\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4}$$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους έχει ελάχιστη τιμή 35 νομισματικών μονάδων, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης.

$$MC(Q) = -\frac{100}{Q^2} + \frac{1}{4}$$

Άρα το συνολικό κόστος λαμβάνει ελάχιστη τιμή 35ν.μ.

Αφού το συνολικό κόστος λαμβάνει ελάχιστη τιμή 35χιλ.
θα πρέπει να υπάρχει ποσότητα $\underline{\underline{Q_0}}$ ώστε

$$TC(Q_0)=35$$

$\downarrow$

η ποσότητα για την οποία έχουμε
ελάχιστη τιμή

Επίσης, αφού στο Q_0 έχουμε ελάχιστη τιμή
θα ισχύουν: α) $TC'(Q_0)=0$ ή $MC(Q_0)=0$
και $TC''(Q_0)>0$ (κριτήριο της $2^{ης}$ παραγώγου.)

$$TC(Q)=\int MC(Q)\,dQ=\int -\frac{100}{Q^2}+\frac{1}{4}\,dQ$$

$$=\frac{100}{Q}+\frac{1}{4}Q+C \Rightarrow$$

$$\int -\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{x}+c$$

$$\boxed{TC(Q)=\frac{100}{Q}+\frac{1}{4}Q+C} \quad (\text{III})$$

Γνωρίζουμε ότι: $\boxed{TC'(Q_0)=0}$ (I) και $\boxed{TC(Q_0)=35}$ (II)

$$\ldots \frac{100}{\ldots} \ldots \frac{1}{\ldots}=0 \Rightarrow \frac{100}{\ldots}=\frac{1}{\ldots} \Rightarrow Q_0^2=400 \Rightarrow$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow -\frac{100}{Q_0^2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{100}{Q_0^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow Q_0^2 = 400 \Rightarrow$$

$\boxed{Q_0 = 20}$ ή $\boxed{Q_0 = -20}$

Δεκτή — Απορ.

$$TC'(Q) = \frac{-100}{Q^2} + \frac{1}{4} \Rightarrow TC''(Q) = \frac{200}{Q^3}$$

άρα $TC''(20) = \frac{200}{20^3} > 0$

επομένως για $Q_0 = 20$ η TC λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Άρα $TC(Q_0) = 35 \Rightarrow$

$$TC(20) = 35 \overset{(\mathrm{III})}{\Longrightarrow} \frac{100}{20} + \frac{1}{4}\cdot 20 + c = 35$$

$$\Rightarrow 5 + 5 + c = 35 \Rightarrow \boxed{c = 25}$$

Συνολικά, $\boxed{TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{1}{4}Q + 25}$

S.O.S.

►**Άσκηση 8.** Δίνονται οι συναρτήσεις ζήτησης $D(p)$ και προσφοράς $S(p)$ ενός προϊόντος ως προς την τιμή p της μιας μονάδας:

$q_d = D(p) = 140 - 2p$ και $q_s = S(p) = 4p + 20$

i. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση συνολικού κόστους, αν το συνολικό κόστος παραγωγής q μονάδων, $TC(q)$, δίνεται από ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο ως προς q και γνωρίζουμε ότι:

α. το σταθερό συνολικό κόστος ισούται με 90 νομισματικές μονάδες

β. το κέρδος, δηλαδή η διαφορά των συνολικών εσόδων από το συνολικό κόστος, μεγιστοποιείται στην τιμή ισορροπίας και

β. το κέρδος, δηλαδή η διαφορά των συνολικών εσόδων από το συνολικό κόστος, μεγιστοποιείται στην τιμή ισορροπίας και

γ. το οριακό κόστος για παραγόμενη ποσότητα που αντιστοιχεί στο ήμισυ της τιμής ισορροπίας ισούται με 7 νομισματικές μονάδες.

ii. Να βρεθεί η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα. Να υπολογισθούν τα μέγιστα συνολικά έσοδα.

iii. Να βρεθεί η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος. Να υπολογισθεί το ελάχιστο μέσο κόστος.

$$q_d = D(p) = 140 - 2p \quad \text{και} \quad q_s = S(p) = 4p + 20$$

$$Q_D = 140 - 2P \quad \text{και} \quad Q_S = 4P + 20$$

$$\boxed{TC(Q_S)} \qquad \boxed{TR(Q_D)}$$

i) Αφού $TC(Q)$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς Q, θα έχει τη μορφή:

$$\boxed{TC(Q) = \alpha Q^2 + \beta \cdot Q + \gamma}$$

α) ⇝ $FC = 90$ $(TC(0) = 90)$ άρα $\boxed{\gamma = 90}$

β) Σημείο ισορροπίας: $Q_S = Q_D \Rightarrow$

$4P + 20 = 140 - 2P \Rightarrow 6P = 120 \Rightarrow$

$\boxed{P^* = 20}$ και $\boxed{Q_S^* = Q_D^* = 100}$

Αφού το κέρδος μεγιστοποιείται στην τιμή ισορροπίας θα εκφράσουμε το κέρδος σαν συνάρτηση της τιμής και τότε $\Pi'(20) = 0$ (και $\Pi''(20) < 0$ μέγιστο)

Συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi(P) = TR(P) - TC(P)$$

$$\Pi(P) = P \cdot Q_D - (\alpha \cdot Q_S^2 + \beta \cdot Q_S + 90)$$

$$\Pi(P) = P \cdot (140 - 2P) - (\alpha(4P+20)^2 + \beta(4P+20) + 90)$$

$$\Pi(P) = 140P - 2P^2 - \alpha(4P+20)^2 - \beta(4P+20) - 90$$

$$\boxed{[(4P+20)^2]' = 2(4P+20)\cdot(4P+20)' = 8(4P+20)}$$

$$\Pi'(P) = 140 - 4P - 8\alpha(4P+20) - 4\beta$$

$$\Pi'(20) = 0 \Rightarrow 140 - 80 - 800\alpha - 4\beta = 0$$

$$60 - 800\alpha - 4\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{200\alpha + \beta = 15} \quad (1)$$

γ) $TC' = (\alpha Q_S^2 + \beta Q_S + 90)' = 2\alpha Q_S + \beta$

P^*

$$TC' = 2a(4P+20) + b \qquad P = \frac{P^*}{2} = 10$$

$$TC'(10) = 7 \Rightarrow \boxed{120a + b = 7} \quad (2)$$

$$(1) - (2) \quad 80a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 0.1}$$

$$\underbrace{120 \cdot 0.1}_{} + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 12 \Rightarrow \boxed{b = -5}$$

Συνολικά έχουμε: $\boxed{TC(Q) = 0.1Q^2 - 5Q + 90}$

ii) $TR = P \cdot Q_D \Rightarrow TR(P) = P \cdot (140 - 2P)$

$$TR(P) = 140P - 2P^2$$

$$TR'(P) = \underline{140 - 4P} = 0 \Rightarrow \boxed{P = \frac{140}{4} = 35}$$

$TR''(P) = -4$ άρα $TR''(35) = -4 < 0$

άρα για $P = 35$ μεγιστοποιούνται τα έσοδα.

Οπότε $Q_D = 140 - 2 \cdot 35 = \underline{70}$.

Μέγιστα συνολικά έσοδα:

$TR(35) = 140 \cdot 35 - 2 \cdot 35^2 = 2450$

iii) $AC(Q) = \dfrac{TC(Q)}{Q} = \dfrac{0.1Q^2 - 5Q + 90}{Q}$

$AC(Q) = 0.1Q - 5 + \dfrac{90}{Q}$

$AC'(Q) = 0.1 - \dfrac{90}{Q^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{90}{Q^2} = 0.1 \Rightarrow$

$Q^2 = \dfrac{90}{0.1} \Rightarrow Q^2 = 900 \Rightarrow \boxed{Q=30}$ ή $\boxed{Q=-30}$

Δεκτή απορ.

$AC''(Q) = +\dfrac{90}{Q^3}$, $AC''(30) = \dfrac{90}{30^3} > 0$

Άρα, για $Q=30$ ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος.

$AC(30) = 0.1 \cdot 30 + \dfrac{90}{30} - 5 =$

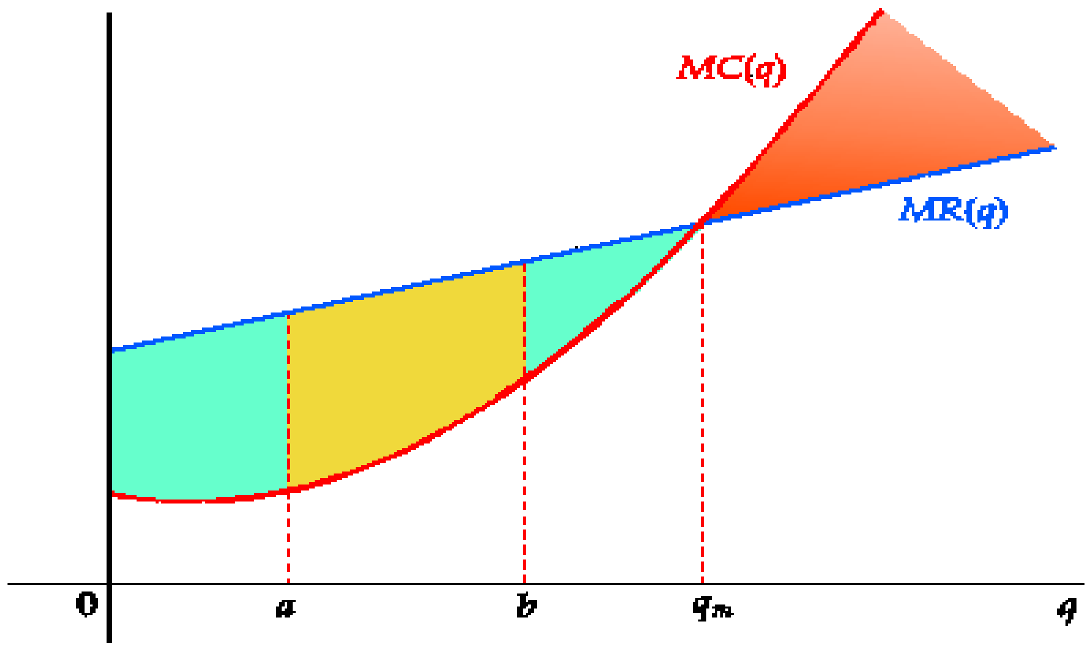
$= 3 + 3 - 5 = \underline{1 \text{ ν.μ.}}$

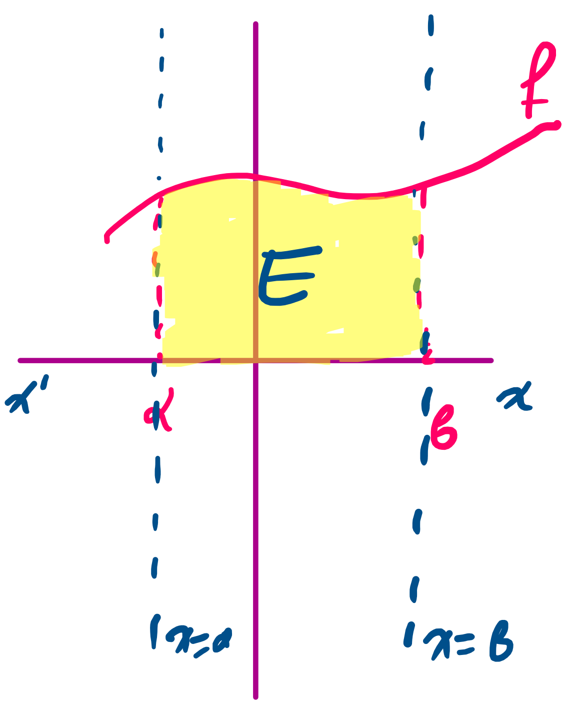
►**Άσκηση 9.** Οι συναρτήσεις των οριακών εσόδων $MR(q)$ και του οριακού κόστους $MC(q)$ του προϊόντος μιας επιχείρησης είναι σχεδιασμένες στο παρακάτω διάγραμμα. Η επιχείρηση επιθυμεί να γνωρίζει

i. το συνολικό κέρδος της, αν η παραγωγή του προϊόντος μεταβληθεί από την ποσότητα $q = a$ στην ποσότητα $q = b$

ποσότητα $q = a$ στην ποσότητα $q = b$

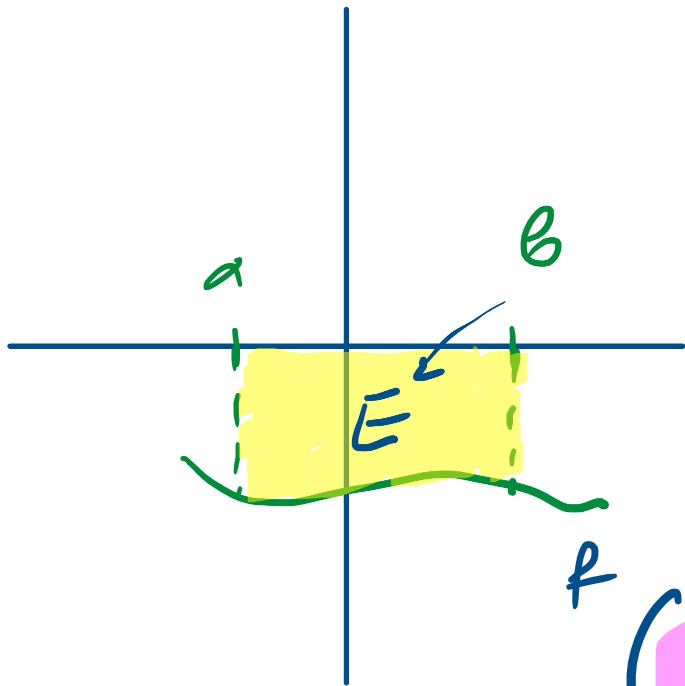
ii. για ποια τιμή του q μεγιστοποιείται το κέρδος της.





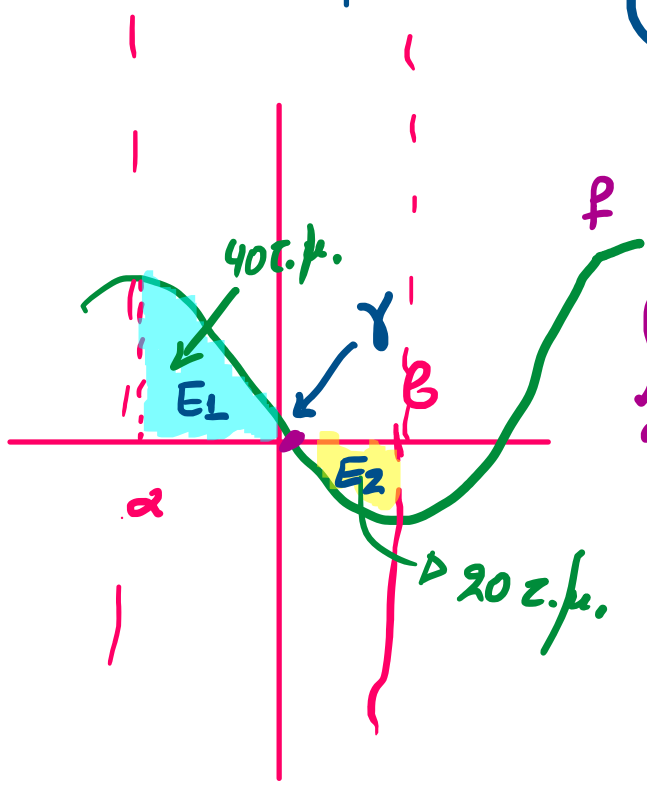
graph $\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ x = \beta \\ G_f \text{ ή } C_f \\ x x' \end{array} \right\}$ curve

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \quad (f \geq 0)$$



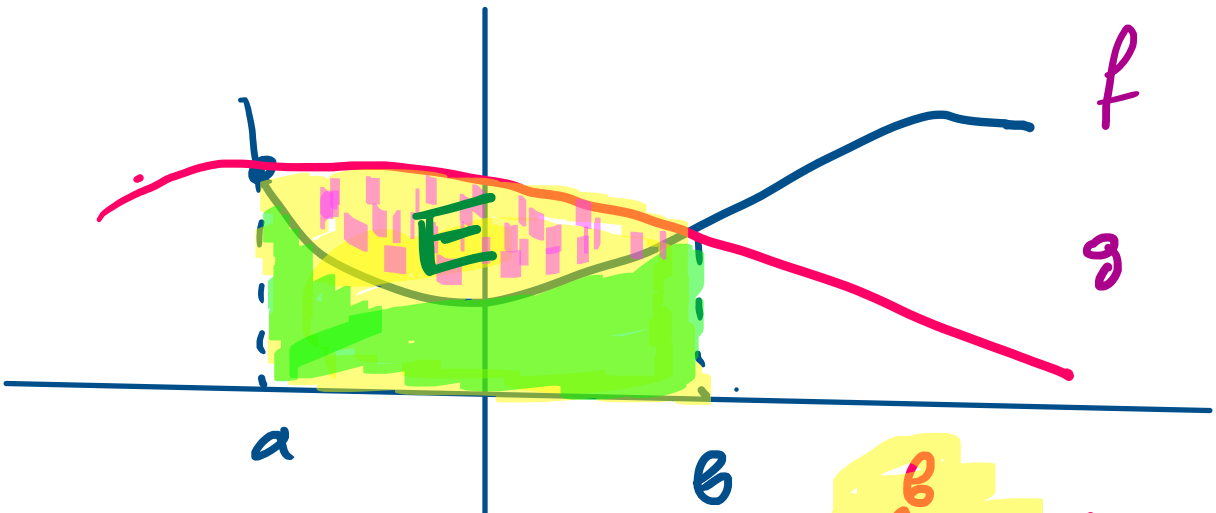
$$E = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$(f \leq 0)$ ή $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right|$



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \neq E$$

$$E = E_1 + E_2 = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \left|\int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx\right|$$

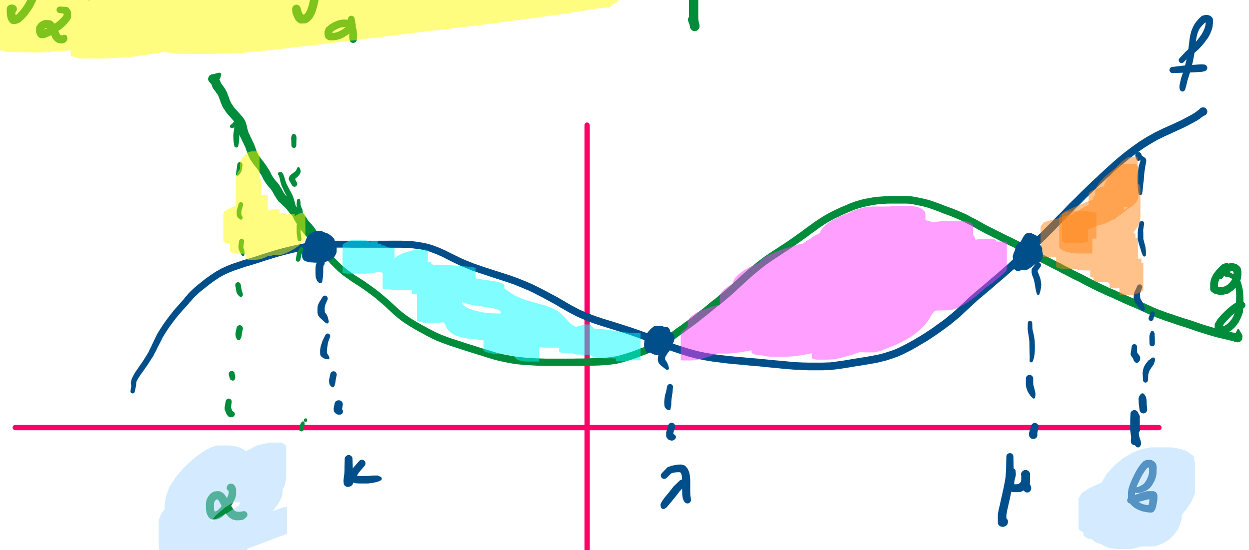


$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

Εμβαδόν μεταξύ των f, g:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$



$f(x) = g(x) \Rightarrow \kappa, \lambda, \mu.$

$$E = \int_{\alpha}^{\kappa} g(x) - f(x)\,dx +$$

β

$$\int_{\mu}^{\lambda} f(x)-g(x)\,dx+\int_{\lambda}^{\mu} g(x)-f(x)\,dx+\int_{\mu}^{\beta} f(x)-g(x)\,dx$$