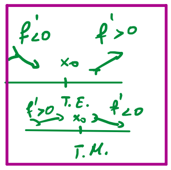
Notes 17_10_2024

$f \to f' > 0 \rightsquigarrow f \uparrow$

$\quad \to f' < 0 \rightsquigarrow f \downarrow$

Αν $f'(x_0) = 0 \rightsquigarrow$ κρ. της 1ης παραγ.



$\rightsquigarrow$ κρ. της 2ης παραγώγου

$f''(x_0) > 0 \to$ Τ.Ε.

$f''(x_0) < 0 \to$ Τ.Μ.

Π.χ. $f(x) = x^4$ $\qquad$ $f(x) = x^5$

Κριτήριο ν-οστής παραγώγου

$f'' \rightsquigarrow f^{(2)}$

$f''' \rightsquigarrow f^{(3)}$

$f'''' \rightsquigarrow f^{(4)}$

$f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$f''(x) = 12x^2 \xRightarrow{x=0} f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x \xRightarrow{x=0} f'''(0) = 0$

$f''''(x) = f^{(4)}(x) = 24 \xRightarrow{x=0} f^{(4)}(0) = 24 \neq 0.$

Αφού $f^{(4)}(0) > 0 \to$ για $x=0$ έχουμε τοπ. ελάχιστο.

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$f''(x) = 20x^3 \xRightarrow{x=0} f''(0) = 0$

$f'''(x) = 60x^2 \xRightarrow{x=0} f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 120x \xRightarrow{x=0} f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = 120 \xRightarrow{x=0} f^{(5)}(0) = 120 \neq 0$

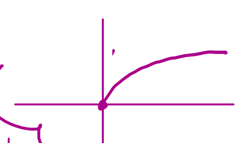
Άρα, για $x=0$ έχουμε σημείο καμπής.

Π.χ. $f(x) = x^3 - 3x^2$

Λύση Η f(x) είναι ...

$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$



$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$

$3x(x-2) = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x=0}$ ή $\boxed{x=2}$

κρ. 1ης παραγώγου

x		0		2	
f'	+	0	−	0	+
f	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε	↗

κρ. 2ης παραγώγου

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \rightsquigarrow$ Τ.Μ.

$f''(2) = 6 > 0 \to$ Τ.Ε.

Σημεία καμπής - κυρτότητα

$f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{6x-6} = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$$f'''(x) = 6 \neq 0$$

$$f'''(1) = 6 \neq 0$$

↳ άρα Σ.Κ.

κριτήριο ν-οστής παραγώγου

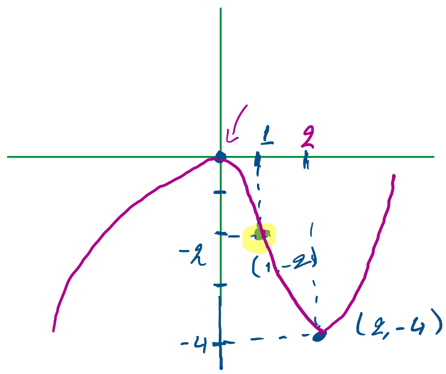
		1	
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ. $\longrightarrow (1, f(1))$ ή $(1,-2)$

		0		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Τ.Μ. $\to (0, f(0))$ ή $(0,0)$

Τ.Ε. $\to (2, f(2))$ ή $(2,-4)$



$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f(1) = -2$

$f(0) = 0$

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2$

$= 8 - 12$

$= -4$

---

9. Ελέγξτε για ακρότατα την συνάρτηση:

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(\underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3})$$

$$= 4(x-1)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

β' τρόπος:

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \rightsquigarrow$ διαιρέτες του -1: ± 1

1	-3	3	-1	1
↓	1	-2	1	
1	-2	1	$\boxed{0}$	

$\longrightarrow$ $x=1$ είναι ρίζα του $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \boxed{(x-1)(x^2 - 2x + 1)} = 0 \Rightarrow x=1 \text{ ή } (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$$

$\boxed{x=1}$

κριτήριο της ν-οστής παραγώγου:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 12(x^2 - 2x + 1) = 12(x-1)^2$$

$$f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = 24x - 24, \quad f'''(1) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \rightsquigarrow f^{(4)}(1) = 24 \neq 0$$

Άρα, αφού $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = 0$, $f^{(4)}(1) = 24 > 0$

Άρα, αφού $f'(1)=0$, $f''(1)=0$, $f'''(1)=0$, $f^{(4)}(1)=24>0$

για $x=1$ έχουμε Τ.Ε.

Κριτήριο 1ης παραγώγου: $f'(x)=4(x-1)^3$

$\boxed{x=1}$

		1	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗
		Τ.Ε.	

10. Βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. $D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad D_{f'}=\mathbb{R}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2 \Rightarrow \boxed{x=1}$ ή $\boxed{x=-1}$

		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗		↘
		Τ.Ε.		Τ.Μ.	

$$f''(x)=\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{(1-x^2)'\cdot(1+x^2)^2-(1-x^2)\left[(1+x^2)^2\right]'}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x\cancel{(1+x^2)}\left[1+x^2+2(1-x^2)\right]}{(1+x^2)^{\cancel{4}}}=\frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$

	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

Σ.Κ. Σ.Κ. Σ.Κ.

		$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	
$-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$3-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$

▶ Παράδειγμα 5.1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5\cdot 1}{3}=\frac{5}{3}$$

▶ Παράδειγμα 5.2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$

Παράδειγμα 5.3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\sin x)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

κανόνας De L'Hospital εφαρμόζεται μόνο σε απροσδιοριστίες.

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x+1}=$

$\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2}=\lim_{x\to 1}x=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$$

$\pm\infty$	$\to$	$\frac{1}{0}$
0	$\to$	$\frac{1}{\pm\infty}$
$0\cdot\infty$	$\to$	$\frac{\infty}{\infty}$

π.χ. $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)\cdot e^{1/x}=$ SOS

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)\cdot e^{1/x} = \left(0 \cdot \infty \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{-1/x}} \left(\frac{0}{0}\right) \underset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{e^{-1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\boxed{\frac{1}{x^2}}\cdot e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{1+x}}{e^{-1/x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$+\infty \quad , \quad 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x^2}\, e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x}} =$$

$$= \dots \quad ?$$

$\boxed{0}\cdot\boxed{\infty} \to \frac{\infty}{\infty}$

$\to \frac{0}{0}$

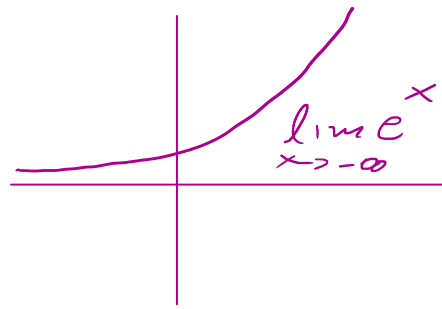
$$\lim_{x\to 0} \boxed{\ln(1+x)}\cdot \boxed{e^{1/x}} =$$

$0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{e^{1/x}}} = \lim_{x\to 0}$$

$\boxed{e}$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{x}$$



15. Βρείτε τα παρακάτω όρια εφαρμόζοντας τον κανόνα του de l'Hôpital:

i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{1}{n\cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x-\sin x)'} =$$

$$\frac{\ln(1+x)}{e^{-1/x}} \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\boxed{\infty}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} =$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{\cos^2 x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{1-\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x \frac{1}{\cos^2 x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{\sin x \cdot \cos^2 x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x \cdot \cos^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^2 x\left(\cos x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos x\right)} =$$

$$\frac{2}{1} = 2.$$