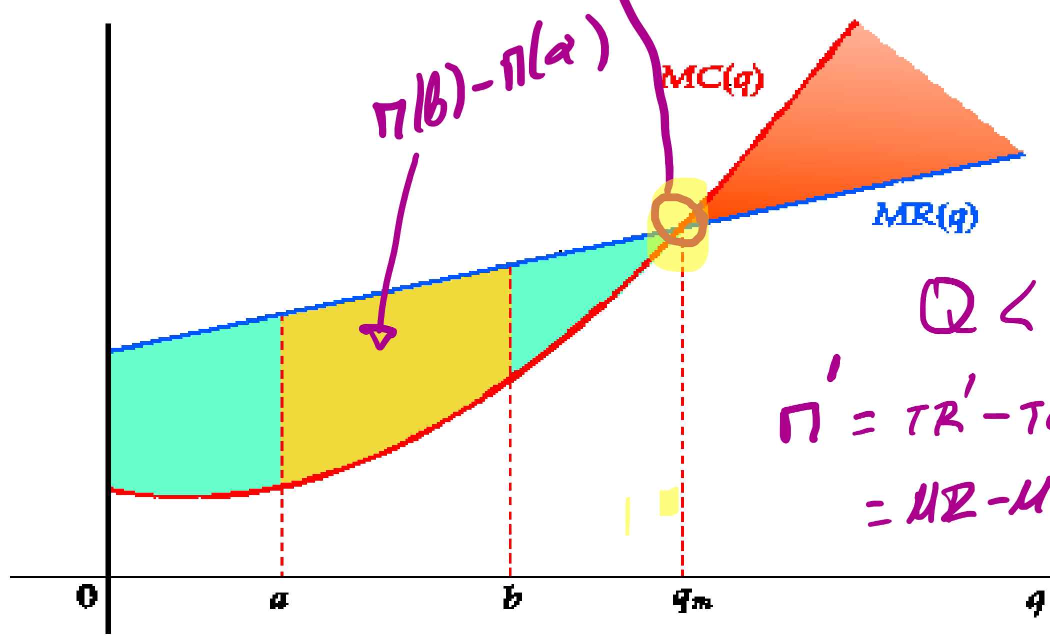
S.O.S

►**Άσκηση 9.** Οι συναρτήσεις των οριακών εσόδων $MR(q)$ και του οριακού κόστους $MC(q)$ του προϊόντος μιας επιχείρησης είναι σχεδιασμένες στο παρακάτω διάγραμμα. Η επιχείρηση επιθυμεί να γνωρίζει

i. το συνολικό κέρδος της, αν η παραγωγή του προϊόντος μεταβληθεί από την ποσότητα $q = a$ στην ποσότητα $q = b$

ii. για ποια τιμή του q μεγιστοποιείται το κέρδος της.



$Q < Q_m$

$\pi' = TR' - TC' =$

$= MR - MC > 0$

$\pi \uparrow$

i) $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

$Q = \alpha \qquad Q = B$

$\pi(B) - \pi(a) = \ ?$

$\pi(B) - \pi(a) = \left(TR(B) - TC(B)\right) - \left(TR(\alpha) - TC(\alpha)\right)$

$$\pi(\beta) - \pi(\alpha) = \Big(\underbrace{TR(\beta) - TC(\beta)}_{\pi(\beta)}\Big) - \Big(\underbrace{TR(\alpha) - TC(\alpha)}_{\pi(\alpha)}\Big)$$

$$= \underbrace{TR(\beta) - TR(\alpha)} - \Big(\underbrace{TC(\beta) - TC(\alpha)}\Big)$$

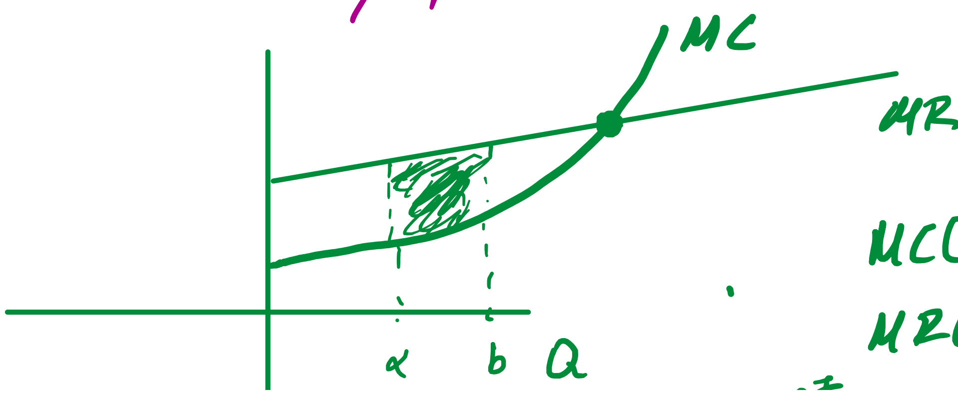
$$\boxed{\begin{array}{l} TC = \int MC\, dQ \\ TR = \int MR\, dQ \end{array}}$$

$$\Big[TR(Q)\Big]_{\alpha}^{\beta} - \Big[TC(Q)\Big]_{\alpha}^{\beta} =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} MR(Q)\, dQ - \int_{\alpha}^{\beta} MC(Q)\, dQ =$$

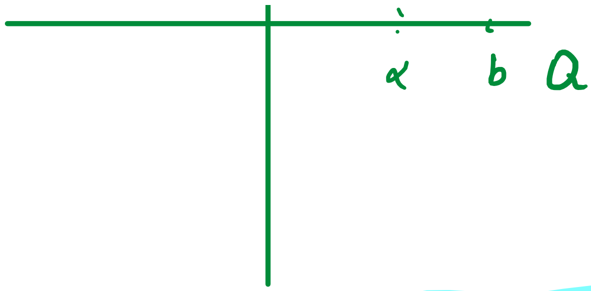
$$= \int_{\alpha}^{\beta} MR(Q) - MC(Q)\, dQ$$

= το χωρίο που σχηματίζεται μεταξύ των MR και MC και των κατακόρυφων ευθειών $x=\alpha$ και $x=\beta$.



$MC(q) = \ldots$

$MR(Q) = \ldots$



$MR(Q) = \dots$

$\int_5^7 MR - MC$

Π.χ. Αν $MC(Q) = 3Q^2 + 2Q + 1$

και $MR(Q) = 2Q + 7$

Να βρεθούν τα συνολικά κέρδη για μεταβολή του Q από $Q = 0.1$ σε $Q = 0.2$.

$$\Pi(0.2) - \Pi(0.1) = \int_{0.1}^{0.2} MR(Q) - MC(Q)\, dQ$$

$$= \int_{0.1}^{0.2} \cancel{2Q} + 7 - 3Q^2 - \cancel{2Q} - 1\, dQ =$$

$$= \int_{0.1}^{0.2} -3Q^2 + 6\, dQ = \left[-Q^3\right]_{0.1}^{0.2} + \left[6Q\right]_{0.1}^{0.2} =$$

$$= \left(-0.2^3 + 0.1^3\right) + 0.6 = \dots$$

ii) $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

(μεγιστοποίηση)

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow TR'(Q) - TC'(Q) = 0 \Rightarrow$$

$$MR(Q) - MC(Q) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{MR(Q) = MC(Q)}$$

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης του κέρδους είναι τα σημεία τομής των καμπυλών MR, MC.

Έστω Q_m η ποσότητα για την οποία ισχύει $\Pi'(Q_m) = 0$ (Q_m κρίσιμο σημείο)

Τότε από το γράφημα, για $Q < Q_m$ έχουμε

$$\underset{(\text{μπλε γραμμή})}{MR} > \underset{(\text{κόκκινη γραμμή})}{MC}$$

άρα

$$\Pi'(Q) = MR - MC > 0 \Rightarrow \Pi' > 0$$

$$\Rightarrow \Pi \uparrow$$

Ομοίως, για $Q > Q_m$ έχουμε

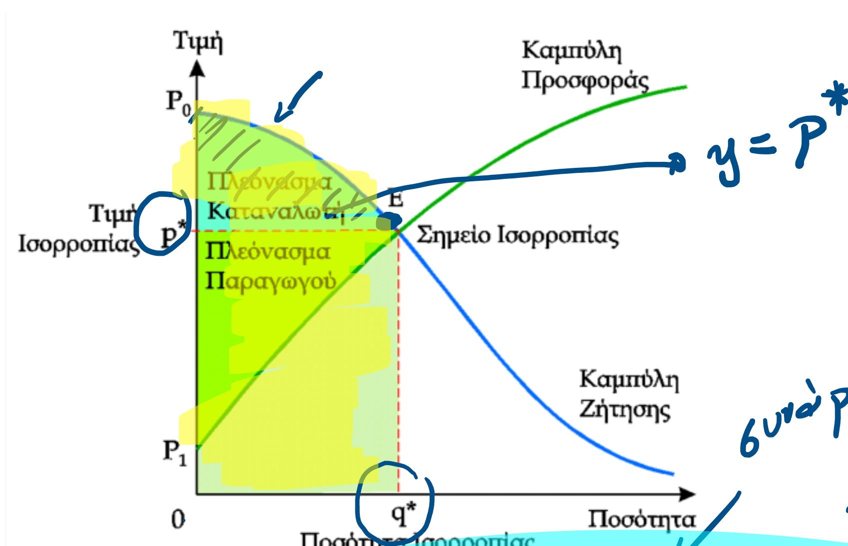
$$\underset{(\text{μπλε γραμμή})}{MR} < \underset{(\text{κόκκινη γραμμή})}{MC}$$

άρα $\Pi'(Q) = MR - MC < 0 \Rightarrow \Pi' < 0$

άρα $\pi'(Q) = MR - MC < 0 \Rightarrow \pi' < 0$

$\Rightarrow \pi \downarrow$

		Q_m	
π'	$+$	0	$-$
π	$\nearrow$	μέγιστο	$\searrow$



συνάρτηση ζήτησης

αριθμός (τιμή ισορροπίας)

Πλεόνασμα καταναλωτή: $\int_0^{q^*} P_D(Q) - P^* \, dQ =$

$= \int_0^{q^*} P_D(Q) - \int_0^{q^*} P^* \, dQ$

$P^* \int_0^{q^*} 1 \, dQ =$

$$= \int_0^{q^*} P_D(Q)\,dQ - P^* \cdot q^*$$

$$P^* \int_0^{q^*} 1\,dQ = P^*[Q]_0^{q^*} = P^* \cdot q^*$$

Ομοίως: πλεόνασμα παραγωγού $= \int_0^{q^*} P^* - P_S(Q)\,dQ$

$$= P^* \cdot q^* - \int_0^{q^*} P_S(Q)\,dQ$$

▶Παράδειγμα 7.1. Να υπολογισθεί το πλεόνασμα καταναλωτή αν

i. $P_d(q) = 40 - 2q$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 10$ νομισματικές μονάδες.

ii. $P_d(q) = \frac{100}{q+2}$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 20$ νομισματικές μονάδες.

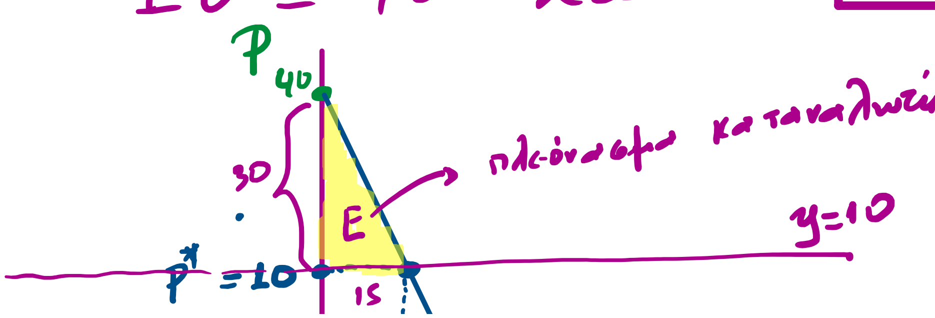
iii. η συνάρτηση ζήτησης είναι $D(p) = \frac{50}{p^2}$ και στο σημείο ισορροπίας η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 10$ νομισματικές μονάδες.

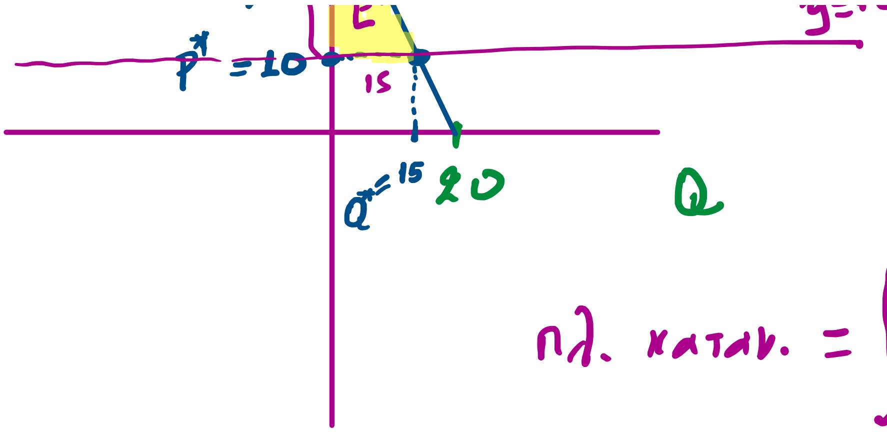
$y = 40 - 2x$

i) $P_D(Q) = 40 - 2Q$, $\boxed{P^* = 10}$

Η ποσότητα στην ισορροπία θα είναι

$10 = 40 - 2Q^* \Rightarrow \boxed{Q^* = 15}$





$$\text{πλ. καταν.} = \int_0^{15} P_D(Q) - 10\, dQ$$

$$= \int_0^{15} 40 - 2Q - 10\, dQ = \int_0^{15} 30 - 2Q\, dQ =$$

$$\left[30Q - Q^2\right]_0^{15} = 30 \cdot 15 - 15^2 = 225 \text{ ν.μ.}$$

ii), iii) ομοίως

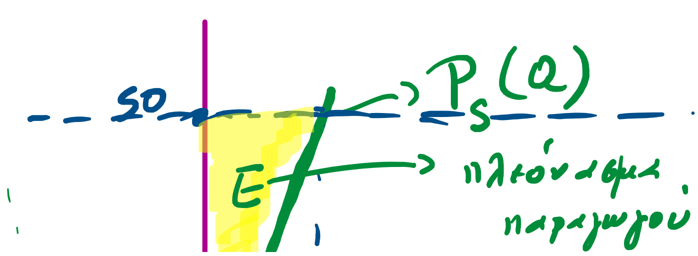
▶ **Παράδειγμα 7.2.** Να υπολογισθεί το πλεόνασμα παραγωγού αν $P_s(q) = q^2 + 5q$ και αν στο σημείο ισορροπίας της αγοράς, η τιμή πώλησης του αγαθού είναι $p^* = 50$ νομισματικές μονάδες.

Στο σημείο ισορροπίας για $P^* = 50$ έχουμε:

$$50 = Q^2 + 5Q \Rightarrow Q^2 + 5Q - 50 = 0 \Rightarrow$$

$$\underset{\text{απορ.}}{Q = -10} \text{ ή } \underset{\text{δεκτή}}{\boxed{Q = 5}}$$

Άρα, $P^* = 50$, $Q^* = 5$.

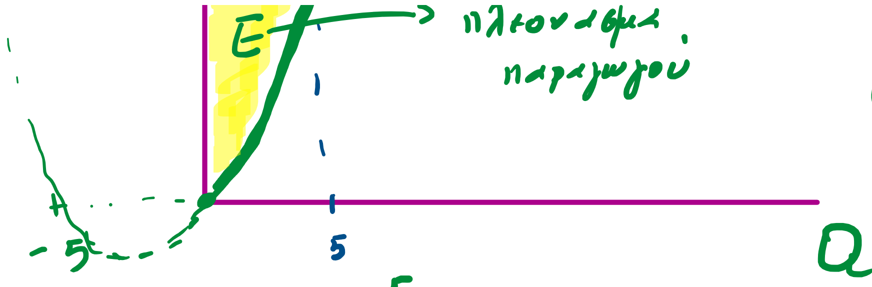


$P(Q) = Q^2 + 5Q$

$Q(Q+5) = 0$

$Q = 0$ ή $Q = -5$

$Q = 0$ ή $Q = -5$



πλ. παραγωγού $= \int_0^5 50 - P_s(Q)\,dQ =$

$$= \int_0^5 50 - Q^2 - 5Q\,dQ = \left[50Q - \frac{Q^3}{3} - 5\frac{Q^2}{2}\right]_0^5 =$$

$$= 50\cdot 5 - \frac{5^3}{3} - 5\cdot\frac{5^2}{2} = 145,83$$

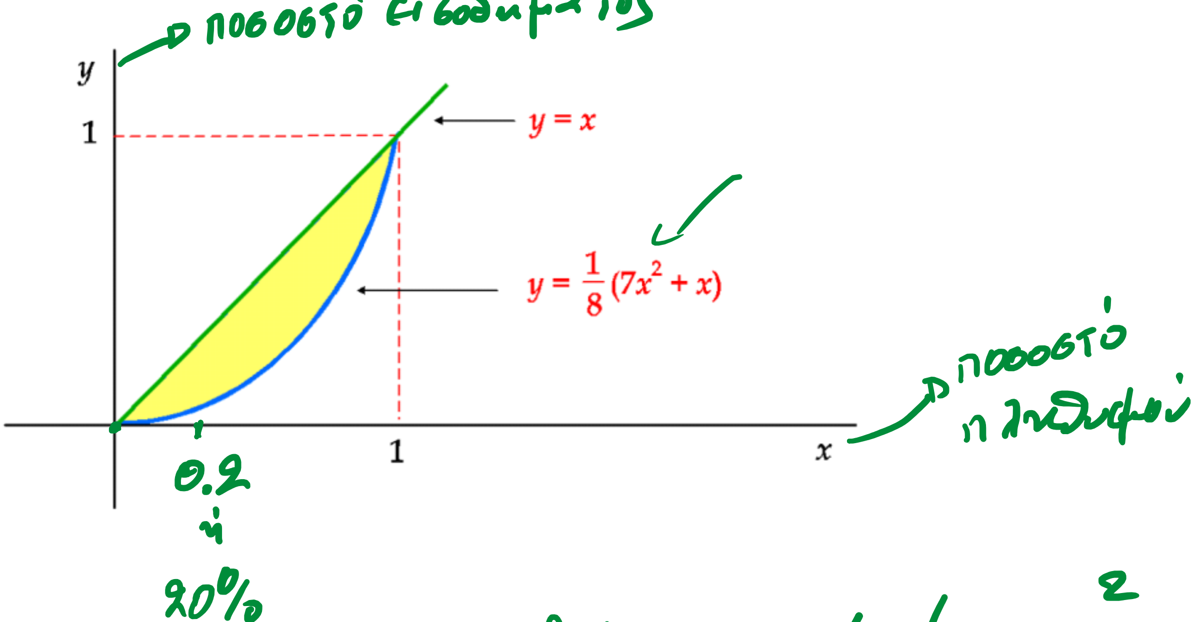
▶ **Παράδειγμα 8.1.** Η κατανομή του εισοδήματος μιας χώρας δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{8}\left(7x^2 + x\right)$

i. να κατασκευασθεί η καμπύλη Lorenz

ii. να βρεθεί ποιο ποσοστό του εθνικού εισοδήματος λαμβάνει το πιο χαμηλά αμειβόμενο 20% του πληθυσμού της χώρας

iii. να υπολογισθεί ο συντελεστής ανισοκατανομής Gini.

Λύση. **(i)** Η καμπύλη Lorenz του παραδείγματος είναι η παραβολή του σχήματος 25, η οποία



ii) $f(0.2) = \frac{1}{8}\left(7\cdot 0.2^2 + 0.2\right) =$

$$8$$

$$= 0.06.$$

Ερμηνεία: Το 20% των χαμ. αμειβόμενων πολιτών λαμβάνει το 6% του συνολικού εθνικού εισοδήματος.

iii) $\text{Συντ. ανισοκ.} = \dfrac{E1}{E2} = 2E1 =$

$$= 2\int_0^1 x - f(x)\,dx = 2\left(\int_0^1 x - \frac{1}{8}(7x^2 + x)\,dx\right) =$$

$$= 2\int_0^1 -\frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{8}x\,dx = 2\left[-\frac{7x^3}{24} + \frac{7x^2}{16}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{7}{24} + \frac{7}{16} = \frac{7}{24}$$