Οικονομικές Συναρτήσεις

Συνάρτηση ζήτησης:

$$D(P) = Q_D(P) = \beta + \alpha P \quad (\text{γραμμική συνάρτηση})$$

$f(x)$

$D \rightarrow$ demand, $Q \rightarrow$ quantity, P = price

Πεδίο ορισμού: $Q \geq 0$, $P \geq 0$

$\boxed{Q(P) \downarrow}$

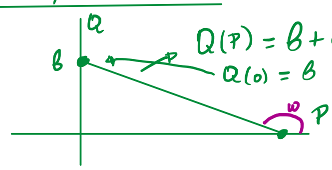
$\Downarrow$

$Q'(P) \leq 0$

Αύξηση της τιμής αναμένουμε να οδηγήσει σε μείωση της ζήτησης

Συνολικά: $Q \geq 0$, $P \geq 0$, $Q'(P) \leq 0$

Γραμμική συνάρτηση ζήτησης:



$Q(P) = \beta + \alpha P$

$Q(0) = \beta$

$\boxed{\alpha = \text{κλίση της ευθείας} < 0}$

$\alpha = \varepsilon\varphi\omega < 0$ ($\hat{\omega}$ αμβλεία)

π.χ. $Q(P) = 3 - 2P$

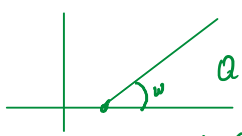
Συνάρτηση προσφοράς:

$S(P) = Q_S(P) \rightarrow$ αύξουσα

$S \rightarrow$ supply

Πεδίο ορισμού: $P \geq 0$, $Q \geq 0$, $Q'(P) \geq 0$

$Q'(P) \geq 0 \rightarrow$ νόμος της προσφοράς



$Q(P) = \beta + \alpha P$

$\alpha = \varepsilon\varphi\omega > 0$ ($\hat{\omega}$ = οξεία)

π.χ. $Q(P) = 6 + 3P$

▶ **Παράδειγμα 3.2.** Ένας παραγωγός διαθέτει το προϊόν του, όταν η τιμή ανά μονάδα υπερβεί τις 5 νομισματικές μονάδες. Για κάθε επιπλέον νομισματική μονάδα ο παραγωγός αυξάνει την προσφορά του κατά δύο μονάδες προϊόντος.
Να βρεθεί και να σχεδιασθεί η συνάρτηση προσφοράς $S(p)$.

$P = 5$, $Q = 0$ $\quad (Q(5) = 0)$

$\boxed{P = 6, \quad Q = 2}$ $\quad (Q(6) = 2)$

Αν θεωρήσω ότι η συνάρτηση προσφοράς είναι γραμμική τότε:

$$Q(P) = \beta + \alpha P$$

Για $P = 5$, $Q = 0 \Rightarrow 0 = \beta + 5\alpha$

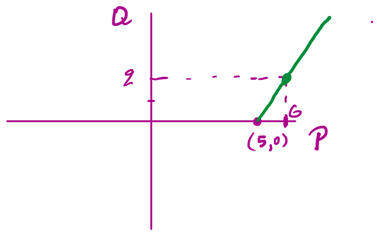
Για $P = 6$, $Q = 2 \Rightarrow 2 = \beta + 6\alpha$

$(-)$ $\boxed{2 = \alpha}$

$\beta + 5\alpha = 0 \xRightarrow{\alpha = 2} \boxed{\beta = -10}$

Άρα, $\boxed{Q(P) = -10 + 2P}$

Άρα, $\boxed{Q(P) = -10 + 2P}$



π.χ. Να εξετάσετε για ποιές τιμές του P η συνάρτηση $\boxed{Q(P) = P^2 - 10P + 24}$ είναι συνάρτηση ζήτησης.

Πεδίο ορισμού: ① $\boxed{P \geq 0}$, $Q(P) \geq 0 \Rightarrow$

② $\boxed{P^2 - 10P + 24 \geq 0}$

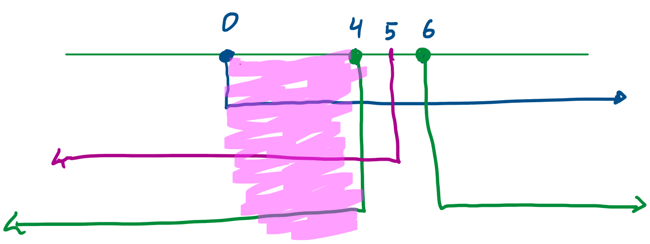
③ $Q'(P) \leq 0$ (συνάρτηση ζήτησης)

$\boxed{2P - 10 \leq 0} \Rightarrow \boxed{P \leq 5}$

$P^2 - 10P + 24 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow P = 4$ ή $P = 6$

	4		6	
+		−		+

$P \in (-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$



Άρα, $P \in [0, 4]$

Ισορροπία της αγοράς:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_D &= Q_S = Q^* \\ P_D &= P_S = P^* \end{aligned}}$$

$(P^*, Q^*) \rightarrow$ Σημείο Ισορροπίας

$(x, f(x))$

Συνάρτηση κόστους, εσόδων, κέρδους:

$\boxed{TC(Q) = VC(Q) + FC}$ Συνάρτηση Συνολικού κόστους

total cost, variable, fixed (πάγιο)

π.χ. $TC(Q) = \underbrace{Q^3 - 6Q^2 + 4Q}_{VC(Q)} + \underbrace{7}_{FC}$

cost cost

Για $Q=0 \to FC$. $\boxed{FC = TC(0)}$

$\boxed{TR(Q) = P \cdot Q}$ Συνολικά έσοδα

total revenue

π.χ. $Q = 3 + 2P \Rightarrow P = \dfrac{Q-3}{2}$

$TR(Q) = P \cdot Q = \left(\dfrac{Q-3}{2}\right) \cdot Q \Rightarrow$

$$\boxed{TR(Q) = \frac{Q^2}{2} - \frac{3Q}{2}}$$

$\boxed{\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)}$ Συνάρτηση κέρδους

κέρδος (profit)

Νεκρό σημείο της αγοράς

$\Pi(Q) = 0 \iff TR(Q) = TC(Q)$

$\Pi(Q) \to$ >0 κέρδος, $=0$ νεκρό σημείο, <0 ζημιά

► Παράδειγμα 3.6. Αν η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι

$D(p) = 120 - p$ $\to$ $q = 120 - P \Rightarrow \boxed{P = 120 - q}$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι

$TC(q) = 2q^2 + 6q + 216$ ←

να βρεθεί η συνάρτηση που δίνει το συνολικό κέρδος και να προσδιορισθούν τα νεκρά σημεία αν υπάρχουν τέτοια.

νεκρά σημεία αν υπάρχουν τέτοια.

$TR = P \cdot Q \Rightarrow TR(Q) = (120 - q)\, q \Rightarrow$

$$\boxed{TR(Q) = 120q - q^2}$$

$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \Rightarrow$

$\Pi(Q) = \underbrace{120q - q^2}_{TR} - \underbrace{(2q^2 + 6q + 216)}_{TC} \Rightarrow$

$$\boxed{\Pi(Q) = -3q^2 + 114q - 216}$$

Νεκρό σημείο: $\Pi(Q) = 0 \Rightarrow -3q^2 + 114q - 216 = 0$

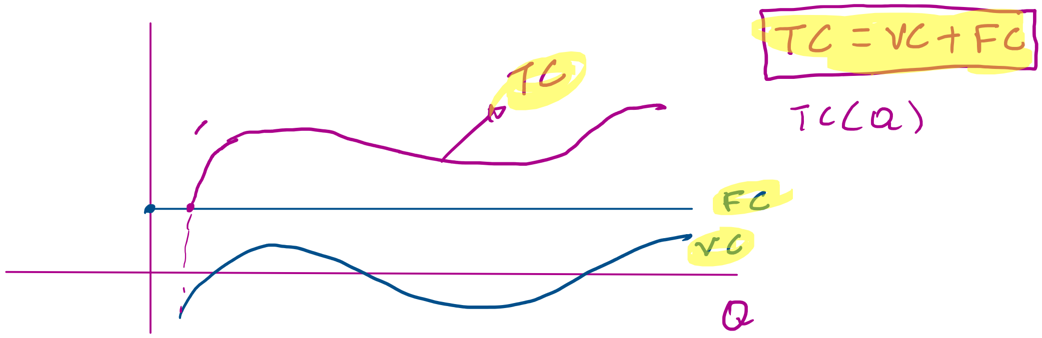
$\boxed{q = 2}$ ή $\boxed{q = 36}$

$P = 120 - q$, $q = 2$, $P = 118$

$q = 36$, $P = 84$

Νεκρά σημεία: $(118, 2)$, $(84, 36)$

(P, Q)



Μέσες Οικονομικές Συναρτήσεις

Αν $F(Q)$ = οικονομική συνάρτηση τότε

η αντίστοιχη μέση συνάρτηση είναι:

$$\boxed{AF(Q) = \frac{F(Q)}{Q}}$$

AF → average

$$\boxed{ATR(Q) = \frac{TR}{Q}}$$

ATR → μέσα έσοδα

$$\boxed{ATC(Q) = \frac{TC}{Q}}$$

ATC → μέσο κόστος

$$ATC = \frac{TC}{Q} = \frac{VC + FC}{Q} =$$

$$= \boxed{\frac{VC}{Q}} + \frac{FC}{Q} = AVC + AFC$$

AVC → μέσο μεταβλητό κόστος

AFC → μέσο σταθερό κόστος

$$\boxed{ATC = AVC + AFC}$$

Οριακές Συναρτήσεις

Οριακά έσοδα: $\boxed{MR(Q) = TR'(Q)}$

MR → marginal revenue

Ερμηνεία: Είναι τα έσοδα από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

Ερμηνεία: Είναι τα έσοδα από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

Π.χ. $Q = 2 - 3P$, $TR = P \cdot Q \Rightarrow$

$\boxed{P = \frac{2-Q}{3}}$ $\quad TR(Q) = \left(\frac{2-Q}{3}\right) \cdot Q$

$$\boxed{TR(Q) = \frac{2}{3}Q - \frac{Q^2}{3}}$$

$$MR(Q) = TR'(Q) = \frac{2}{3} - \frac{2Q}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{MR(Q) = \frac{2}{3}(1-Q)}$$

$\boxed{Q = 30}$ $\quad MR(30) =$ Τα έσοδα από την πώληση της (μιας επιπλέον) 31ης μονάδας προϊόντος

Για να εκτιμήσω τα έσοδα από την πώληση της 10ης μονάδας προϊόντος θα χρησιμοποιούσα το $MR(9)$

Οριακό κόστος: $\boxed{MC(Q) = MTC(Q) = TC'(Q)}$

marginal cost

Ερμηνεία: Είναι το κόστος για την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

$MC(10) = TC'(10) =$ κόστος για την παραγωγή της 11ης μονάδας προϊόντος.

- $MC(Q) = TC'(Q) - (TVC(Q) + FC)' =$

- $\underline{MC(Q)} = TC'(Q) = (TVC(Q) + FC)' =$

$= TVC' = \underline{MTVC}$

▶ **Παράδειγμα 5.3.** Έστω ότι τα οριακά έσοδα MR μιας επιχείρησης εξαρτώνται από τις πωλήσεις και δίνονται από την συνάρτηση:

$$MR(q) = 60 - 2q - 2q^2$$

Αν τα **σταθερά έσοδα είναι μηδενικά** να βρεθεί η συνάρτηση των συνολικών εσόδων.

$\Rightarrow \boxed{TR(0) = 0}$

$$TR(q) = \int TR'(q)\,dq = \int MR(q)\,dq =$$

$$= \int 60 - 2q - 2q^2\,dq = 60q - q^2 - 2\frac{q^3}{3} + c$$

$$\boxed{TR(q) = 60q - q^2 - \frac{2}{3}q^3 + c}$$

Αφού $TR(0) = 0 \Rightarrow 60 \cdot 0 - 0^2 - \frac{2}{3}0^3 + c = 0$

$\Rightarrow \boxed{c = 0}$

Τελικά, $TR(q) = 60q - q^2 - \frac{2}{3}q^3$.

▶ **Παράδειγμα 5.4.** Έστω ότι η συνάρτηση των εσόδων μιας επιχείρησης είναι $TR(q) = 7q$ και ότι η συνάρτηση οριακού κόστους είναι $MC(q) = 3q^2 - 18q + 22$, όπου η παραγωγή μετριέται σε χιλιάδες τεμάχια. Αν το σταθερό κόστος είναι μηδενικό, να βρεθούν

$FC = 0 \Rightarrow \boxed{TC(0) = 0}$

(i) τα νεκρά σημεία της επιχείρησης

(ii) το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιείται (α) το κέρδος και (β) η ζημία.

$\Pi(Q) = TR(Q) - \boxed{TC(Q)}$?

$MC = 3q^2 - 18q + 22 \Rightarrow TC = \int 3q^2 - 18q + 22\,dq =$

$TC(Q) = q^3 - 9q^2 + 22q + c$

όμως $TC(0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{0 = c}$

ἀρα $\boxed{TC(Q) = q^3 - 9q^2 + 22q}$

Άρα, $\Pi(Q) = 7q - (q^3 - 9q^2 + 22q)$

$$\boxed{\Pi(Q) = -q^3 + 9q^2 - 15q}$$

i) Νεκρά σημεία: $\Pi(Q) = 0 \Rightarrow -q^3 + 9q^2 - 15q = 0$

$\Rightarrow q(-q^2 + 9q - 15) = 0$

$\boxed{q = 0}$ Δεκτή ή $-q^2 + 9q - 15 = 0$

$\Downarrow$

$\vdots$

$\boxed{q \geq 0}$

$\boxed{q = 2.209}$ Δεκτή ή $\boxed{q = 6.791}$ Δεκτή

$\Pi(q) = -q^3 + 9q^2 - 15q$

$\Pi'(q) = -3q^2 + 18q - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{q = 1}$ ή $\boxed{q = 5}$

$\Pi''(q) = -6q + 18$

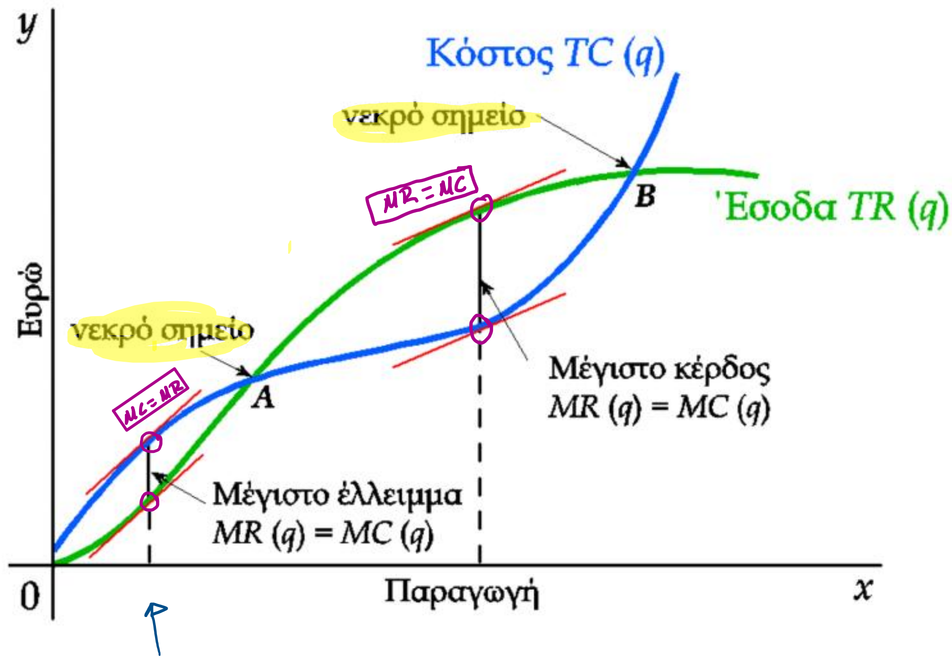
$\boxed{q = 1}$: $\Pi''(1) = -6 + 18 = 12 > 0$

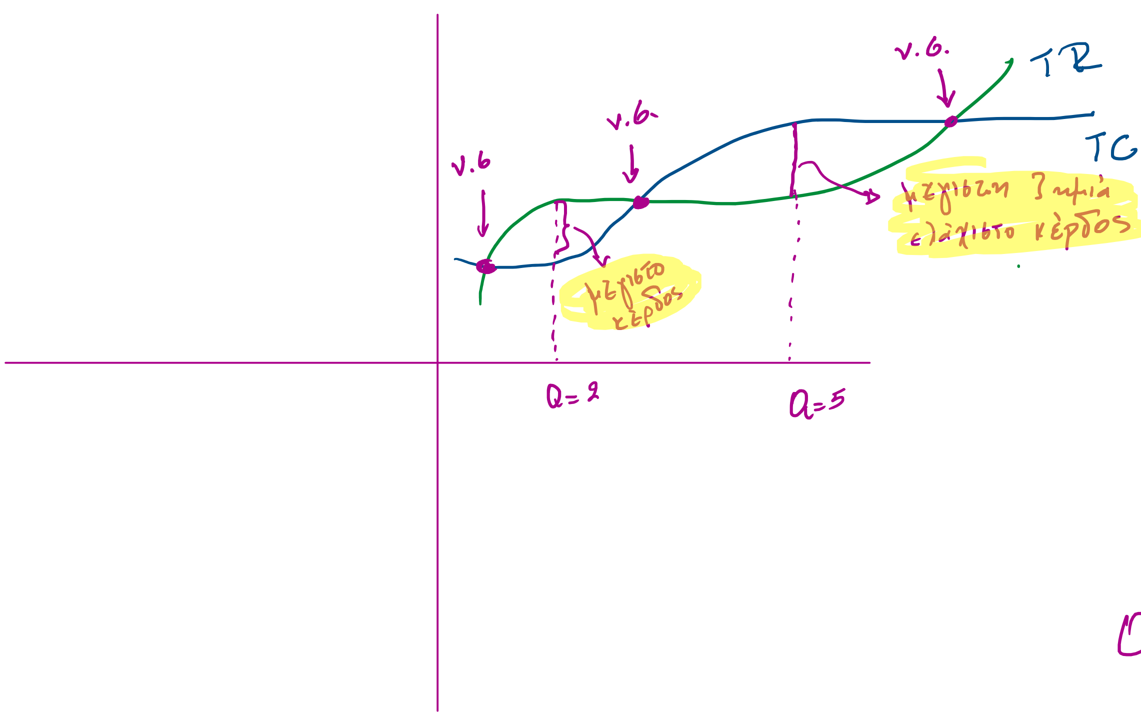
Άρα για $q = 1$ ελάχιστο κέρδος (ή μέγιστη ζημιά)

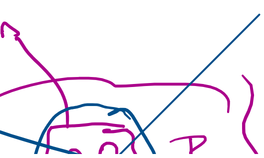
$\boxed{q = 5}$: $\Pi''(5) = -6 \cdot 5 + 18 = -12 < 0$

Άρα, για $q = 5$ μέγιστο κέρδος
ή
(ελάχιστη ζημία.)

Πρόταση 5.2. **(ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ)** *Όταν μεγιστοποιείται το κέρδος (ή το έλλειμμα), τότε το οριακό κόστος είναι ίσο με τα οριακά έσοδα.*







Ελαστικότητα (της ζήτησης)

Αν f είναι μια συνάρτηση τότε ορίζουμε ως ελαστικότητα της f $\left(E(f(x)),\ \varepsilon_f,\ \varepsilon\right)$

$$\boxed{E(f(x)) = \varepsilon_f = \frac{x}{f(x)} \cdot \boxed{f'(x)}}$$

$f(x) \longrightarrow Q(P)$ = συνάρτηση ζήτησης

$$\boxed{\varepsilon_D = \frac{P}{Q_D(P)} \cdot Q_D'(P)} \longrightarrow \text{ελαστικότητα της ζήτησης}$$

$$\boxed{\varepsilon_S = \frac{P}{Q_S(P)} \cdot Q_S'(P)} \longrightarrow \text{ελαστικότητα της προσφοράς}$$

Χαρακτηρισμός ελαστικότητας:

$|\varepsilon_D| = 1$ $\qquad$ ε_D

$|\varepsilon_D| < 1$ $\qquad$ Ερμηνεία: Μας δεί...

ποσοστό μείωσης τη...

ποσότητας από αυ...

... κατά

$|\varepsilon_D| > 1$

$$= \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

χνει το

ι ζητούμενης

ζηση

1 μονάδα.

$|\varepsilon_D| > 1$ ποσοστιαίας

της τιμής κατά

$\boxed{\varepsilon_D < 0} \rightsquigarrow |\varepsilon_D| < 1 \rightsquigarrow$ ανελαστική

$|\varepsilon_D| > 1 \rightarrow$ ελαστική

$|\varepsilon_D| = 1 \rightarrow$ μοναδιαία ελαστική

1 μονάδα.