Ελαστικότητα

Έστω $f(x)$ παραγωγίσιμη τότε ορίζουμε ως ελαστικότητα της f:

$$\varepsilon = E(f(x)) = \varepsilon_f = E_f = \boxed{\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}$$

- Για την περίπτωση όπου $f(x) \to Q_D(P)$ ή $Q_S(P)$

Συνάρτηση ζήτησης

τότε $$\boxed{\varepsilon_{Q_D} = \varepsilon_D = \frac{P}{Q_D(P)} \cdot Q_D'(P)}$$

Ερμηνεία: Η ε_D είναι το ποσοστό μείωσης της ζήτησης που προκύπτει από αύξηση της τιμής κατά 1%.

Συνάρτηση προσφοράς

$$\boxed{\varepsilon_{Q_S} = \varepsilon_S = \frac{P}{Q_S(P)} \cdot Q_S'(P)}$$

Ερμηνεία: Η ε_S είναι το ποσοστό αύξησης της προσφοράς που προκύπτει από αύξηση της τιμής κατά 1%.

$|\varepsilon_D| < 1 \to$ ανελαστική

$$|E_D| > 1 \rightarrow \text{ελαστική}$$

$$|E_D| = 1 \rightarrow \text{μοναδιαία ελαστική}$$

S.O.S. **Ιδιότητες Ελαστικότητας**

Έστω $f(x), g(x)$ παραγωγίσιμες τότε:

i) $E(f(x)\cdot g(x)) = E(f(x)) + E(g(x))$

Απόδειξη: $E(f(x)) = \dfrac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

$$E(f(x)\cdot g(x)) = \frac{x}{f(x)\cdot g(x)} \cdot [f(x)\cdot g(x)]' =$$

$$= \frac{x}{f(x)\cdot g(x)} \cdot [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]$$

$$= \frac{x}{f(x)\cdot \cancel{g(x)}} \cdot f'(x)\cdot \cancel{g(x)} + \frac{x}{\cancel{f(x)}\cdot g(x)} \cdot \cancel{f(x)}\cdot g'(x)$$

$$= \underbrace{\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)} + \underbrace{\frac{x}{g(x)} \cdot g'(x)} =$$

$$= E(f(x)) + E(g(x))$$

ii) $E\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = E(f(x)) - E(g(x))$

$E(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

Απόδειξη:

$$E\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{x}{\frac{f(x)}{g(x)}} \cdot \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' =$$

$$= \frac{x \cdot g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$= \frac{x \cdot \cancel{g(x)}}{f(x)} \cdot \frac{f'(x) \cdot \cancel{g(x)}}{\cancel{g^2(x)}} - \frac{x \cdot \cancel{g(x)}}{\cancel{f(x)}} \cdot \frac{\cancel{f(x)} \cdot g'(x)}{\cancel{g^2(x)}}$$

$$= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) - \frac{x}{g(x)} \cdot g'(x) = E(f(x)) - E(g(x))$$

iii) $E(f(x) + g(x)) = \frac{f(x)\cdot E(f(x)) + g(x)\, E(g(x))}{f(x) + g(x)}$

Απόδειξη: $E(f(x) + g(x)) = \frac{x}{f(x)+g(x)} \cdot [f(x)+g(x)]'$

$$= \frac{x}{f(x)+g(x)} \cdot [f'(x) + g'(x)] =$$

$$= \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)+g(x)} + \frac{\boxed{x \cdot g'(x)}}{f(x)+g(x)} =$$

$\boxed{x \cdot g'(x)} \to g(x) \cdot E(g(x))$

$$= \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)+g(x)} + \frac{x \cdot g'(x)}{f(x)+g(x)} = \frac{f(x) \cdot E(f(x))}{f(x)+g(x)} + \frac{g(x)\, E(g(x))}{f(x)+g(x)}$$

$$E(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) \cdot E(f(x)) = x \cdot f'(x)}$$

iv) $E(f(x) - g(x)) = \dfrac{f(x)\, E(f(x)) - g(x)\, E(g(x))}{f(x) - g(x)}$

Απόδειξη: $E(f(x) - g(x)) = \dfrac{x}{f(x)-g(x)} \cdot [f(x) - g(x)]'$

$$= \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)-g(x)} - \frac{x \cdot g'(x)}{f(x)-g(x)}$$

$$= \frac{f(x) \cdot E(f(x))}{f(x)-g(x)} - \frac{g(x) \cdot E(g(x))}{f(x)-g(x)}$$

$E(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

$f(x)\, E(f(x)) = x \cdot f'(x)$

▶Παράδειγμα 6.2. Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια ιδιοτήτων, η ελαστικότητα της συνάρτησης

$h(x) = \sqrt[3]{x^3+2} \cdot e^{x^2+5}$

$$\boxed{E(f(x) \cdot g(x)) = E(f(x)) + E(g(x))}$$

$$E(h(x)) = E\left(\sqrt[3]{x^3+2} \cdot e^{x^2+5}\right) =$$

$$E\left(\sqrt[3]{x^3+2}\right) + E\left(e^{x^2+5}\right) =$$

$E(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$

$E(\sqrt[3]{x^3+2}) + E(e^{x^2+5}) =$

$(x^3+2)^{1/3}$ $\quad \frac{1}{3}-1$

$\frac{x}{(x^3+2)^{1/3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}(x^3+2)^{-2/3} \cdot \cancel{3}x^2 + \frac{x}{\cancel{e^{x^2+5}}} \cdot \cancel{e^{x^2+5}} \cdot 2x =$

$\frac{x^3}{x^3+2} + 2x^2.$ $\quad (x^3+2)^{1/3} \cdot (x^3+2)^{2/3}$

$\boxed{a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}}$ $(x^3+2)^1$

$$\frac{(x^3+2)^{-2/3}}{(x^3+2)^{1/3}} = (x^3+2)^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = (x^3+2)^{-1}$$

Ασκήσεις:

5. Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι

$$q_d(p) = 25 + 0{,}3p - 0{,}2p^2$$

και η συνάρτηση προσφοράς

$$q_s(p) = -5 + 2p - 0{,}01p^2$$

Να βρεθούν:

i. η ελαστικότητα ζήτησης και η ελαστικότητα προσφοράς.

ii. η τιμή της ελαστικότητας ζήτησης και της ελαστικότητας προσφοράς στο σημείο ισορροπίας.

$$\boxed{\varepsilon(f(x)) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}$$

i) $\varepsilon_D = \varepsilon_{q_D} = \frac{P}{q_D} \cdot q_D'$

$$\varepsilon_D = \frac{P}{25+0.3p-0.2p^2}\cdot(0.3-0.4p)$$

$$\boxed{\varepsilon_D = \frac{0.3p-0.4p^2}{25+0.3p-0.2p^2}}$$

$$\varepsilon_S = \frac{P}{q_S(P)}\cdot q_S'(P) = \frac{P}{-5+2p-0.01p^2}\cdot(2-0.02p)$$

$$\boxed{\varepsilon_S = \frac{2p-0.02p^2}{-5+2p-0.01p^2}}$$

<u>Σημείο Ισορροπίας:</u> $q_D = q_S \Rightarrow$

$$25+0.3p-0.2p^2 = -5+2p-0.01p^2 \Rightarrow$$

$$-0.19p^2-1.7p+30=0$$

$\Delta = \ldots$

$$\boxed{P_1 = \frac{5\cdot\sqrt{2569}-85}{19}}$$

$$p_2 = \frac{-5\sqrt{2569}-85}{19} < 0$$

$\rightarrow$ απορρίπτεται $(P \geq 0)$

Άρα, για P_1 έχουμε:

$$\boxed{\varepsilon_D = \frac{0.3p-0.4p^2}{25+0.3p-0.2p^2}}$$

$$\boxed{\varepsilon_D = \frac{0.3p - 0.4p^2}{25 + 0.3p - 0.2p^2}}$$

$$\varepsilon_D(P_1) = \frac{-28.73}{11.94} = \underline{\underline{-2.4062}}$$

Χαρακτηρισμός: $|\varepsilon_D| = 2.4062 > 1$

η ζήτηση είναι ελαστική.

Ερμηνεία: Αν αυξήσω την τιμή κατά 1% τότε η ζήτηση θα μειωθεί κατά 2.4062%

$$\varepsilon_S(P_1) = 1.3532$$

Χαρακτηρισμός: $\varepsilon_S > 1 \rightsquigarrow$

η προσφορά είναι ελαστική

Ερμηνεία: Αν αυξήσω την τιμή κατά 1% τότε η προσφερόμενη ποσότητα θα αυξηθεί κατά 1.3532%

►**Άσκηση 2.** Η συνάρτηση οριακού κόστους $MC(q)$ για κάποιο προϊόν είναι της μορφής $MC(q) = a_2q^2 + a_1q + a_0$, όπου η μεταβλητή q συμβολίζει την παραγόμενη ποσότητα. Στο ξεκίνημα της παραγωγής το οριακό κόστος είναι ίσο με 150 νομισματικές μονάδες, ενώ για [redacted] επίπεδα παραγωγής 10 και 20 μονάδων είναι 80 και 610 νομισματικές μονάδες αντίστοιχα. Το σταθερό κόστος παραγωγής είναι 200 νομισματικές μονάδες και η τιμή του προϊόντος 480 νομισματικές μονάδες.

i. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση του οριακού κόστους $MC(q)$, και να υπολογισθούν οι συναρτήσεις: συνολικού κόστους $TC(q)$, εσόδων $TR(q)$, και κερδών $\Pi(q)$.

ii. Να υπολογισθεί το επίπεδο παραγωγής το οποίο μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος της επιχείρησης.

$\boxed{MC = TC'}$

οριακό κόστος

$TC = \int MC$

Ερμηνεία του MC: Μας δίνει το κόστος για την κατασκευή μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος.

δηλ. $MC(9)$ = το κόστος κατασκευής της 10ης μονάδας προϊόντος

$MC(0)=150$

$MC(10)=80$

$MC(20)=610$

$FC=200$

$\boxed{P=480}$

$$MC = a_2q^2 + a_1q + a_0$$

$$MC(0) = 150 \Rightarrow \boxed{a_0 = 150}$$

$$MC(10) = 80 \Rightarrow 10\cancel{0}a_2 + 1\cancel{0}a_1 + 15\cancel{0} = 8\cancel{0}$$

$$\boxed{10a_2 + a_1 + 7 = 0} \quad (I)$$

$$MC(20) = 610 \Rightarrow 40\cancel{0}a_2 + 2\cancel{0}a_1 + 15\cancel{0} = 61\cancel{0}$$

$$40a_2 + 2a_1 - 46 = 0$$

$$\boxed{20a_2 + a_1 - 23 = 0} \quad (II)$$

(I), (II): $10a_2 + a_1 = -7$

$20a_2 + a_1 = 23$

$$\ominus \quad \frac{20\alpha_2 + \cancel{\alpha_1} = 23}{}$$

$$100\alpha_2 = 30 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 3}$$

Για $\boxed{\alpha_2 = 3} \Longrightarrow 10 \cdot 3 + \alpha_1 = -7 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -37}$

Συνολικά: $\boxed{MC(q) = 3q^2 - 37q + 150}$

Συνολικό κόστος: $TC = \int MC(q)\,dq =$

$$\int 3q^2 - 37q + 150\,dq =$$

$$q^3 - \frac{37}{2}q^2 + 150q + C \rightsquigarrow FC$$

όμως $\boxed{FC = 200}$

άρα $\boxed{TC = q^3 - \frac{37}{2}q^2 + 150q + 200}$

Συνολικά έσοδα: $TR(q) = P \cdot q$

$$p = 480$$

$$\boxed{TR(q) = 480 \cdot q}$$

Συνολικά κέρδη:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) \Rightarrow$$

$$\Pi(q) = 480q - q^3 + \frac{37}{2}q^2 - 150q - 200$$

$$\boxed{\Pi(q) = -q^3 + \frac{37}{2}q^2 + 330q - 200}$$

$$\Pi'(q) = -3q^2 + 37q + 330$$

$$\Pi''(q) = -6q + 37$$

$$\Pi'(q) = 0 \Rightarrow -3q^2 + 37q + 330 = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{q = -6}$ απορρίπτεται $q \geq 0$ ή $\boxed{q = \frac{55}{3}}$

Κρίσιμο σημείο για $q = \frac{55}{3}$

$$\Pi''\left(\frac{55}{3}\right) = -6 \cdot \frac{55}{3} + 37 < 0$$

Άρα, για $q = \frac{55}{3}$ μεγιστοποιείται το κέρδος.

►**Άσκηση 3.** Δίνεται η συνάρτηση των ολικών εσόδων μιας επιχείρησης:
$TR(q) = -q^3 + 18q^2 - 60q$,
όπου q είναι η ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στην αγορά.

i. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q στην οποία η συνάρτηση των μέσων εσόδων έχει τοπικό ακρότατο. Στη συνέχεια να χαρακτηρισθεί το σημείο αυτό ως τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο και να βρεθεί η τιμή των ολικών (TR) και των μέσων εσόδων (AR) στο ακρότατο.

ii. Να υπολογιστεί η συνάρτηση οριακών εσόδων (MR) και να βρεθεί η τιμή της στο τοπικό ακρότατο του πρώτου ερωτήματος.

iii. Να προσδιορισθεί η ποσότητα q για την οποία ισχύει $\boxed{MR = AR}$. Συγκρίνετε αυτή την ποσότητα με την ποσότητα προϊόντος για την οποία υπάρχει ακρότατο στο AR.

iv. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα μέσα έσοδα η ελαστικότητα των ολικών εσόδων ισούται με την μονάδα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

v. Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα ολικά έσοδα η ελαστικότητα των μέσων εσόδων ισούται με μείον ένα. Να δοθεί η ερμηνεία της τιμής της ελαστικότητας.

i) $\boxed{TR = -q^3 + 18q^2 - 60q}$

ATR ή AR $= \frac{TR}{q}$

ATC ή AC $= \frac{TC}{q}$

μέσα έσοδα: $AR = \frac{TR}{q} \Rightarrow$

$AR = \frac{-q^3 + 18q^2 - 60q}{q}$

$\boxed{AR = -q^2 + 18q - 60}$

$AR' = -2q + 18$, $AR'' = -2$

$AR' = 0 \Rightarrow \boxed{q = 9}$ $\quad AR''(9) = -2 < 0$

Άρα, για $q = 9$ τα μέσα έσοδα μεγιστοποιούνται

$\boxed{TR(9) = 189}$

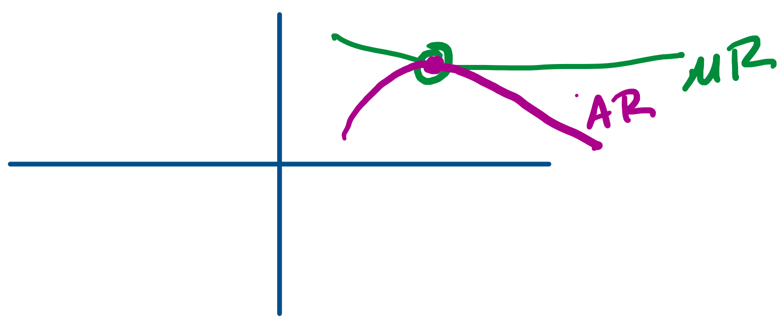
$$\boxed{TR(9) = 189}$$

$$\boxed{AR(9) = 21}$$

ii) $MR = (TR)' = (-q^3 + 18q^2 - 60q)' = -3q^2 + 36q - 60$

iii) $MR(9) = \dots = 21$

Παρατήρηση: Στο σημείο $q=9$ όπου μεγιστοποιούνται τα συνολικά μέσα έσοδα ισχύει $AR = MR$.



iv) Τα μέσα έσοδα μεγιστοποιούνται για $q = 9$

$$\mathcal{E}_{TR} = \frac{q}{TR(q)} \cdot TR'(q)$$

$$\boxed{TR(q) = -q^3 + 18q^2 - 60q}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{f(x)} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}$$

$$\mathcal{E}_{TR} = \frac{\cancel{q}}{\cancel{q}(-q^2 + 18q - 60)} \cdot (-3q^2 + 36q - 60)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{TR} = \frac{-3q^2 + 36q - 60}{-q^2 + 18q - 60}}$$

Για $q=9 \Rightarrow \mathcal{E}_{TR}(9) = \dots = 1$

Ερμηνεία:

Επομένως: Στο σημείο όπου το AR μεγιστοπ. η Ελαστ. των συνολικών εσόδων είναι μοναδιαία δλδ αν αυξήσω την τιμή κατά 1% τότε τα συνολικά έσοδα θα αυξηθούν κατά 1%.

v) $TR = -q^3 + 18q^2 - 60q$

$TR' = -3q^2 + 36q - 60$ $\quad$ $TR'' = -6q + 36$

$TR' = 0 \Rightarrow q = 2$ ή $q = 10$

$TR''(2) = \dots > 0$

$TR''(10) = -60 + 36 < 0 \longrightarrow$ Για $q = 10$ έχουμε μέγιστα συνολικά έσοδα.

$$\mathcal{E}_{AR} = \frac{q}{-q^2 + 18q - 60} \cdot (-2q + 18)$$

$$\boxed{AR = -q^2 + 18q - 60}$$

$$\mathcal{E}_{AR}(10) = \frac{10}{-10^2 + 180 - 60}(-20 + 18) = \dots = -1$$

Ερμηνεία: Στο $q = 10$ όπου μεγιστοπ. τα συνολικά έσοδα ισχύει $\mathcal{E}_{AR} = -1$ δλδ (μοναδιαία ελαστικά)

αύξηση της τιμής κατά 1% οδηγεί σε
μείωση των μέσων εσόδων κατά 1%.