Notes 31_10_2024

$f(g(x))$ $g'(x)$

▶ Παράδειγμα 3.3. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\int (\ln x)^3 \boxed{\frac{1}{x}} dx = I$

Θέτω $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{dx = x \cdot du}$

$I = \int u^3 \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot du = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\ln^4 x}{4} + c$

▶ Άσκηση 3.3. (Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου XII)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

S.O.S.

$\int e^{\sin x} \sin x \boxed{\cos x}\, dx = \int e^u \cdot u \cdot \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}} =$

$f(g(x))$

Θέτω $\boxed{u = \sin x} \Rightarrow$

$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{\cos x}}$

Παραγοντική ολοκλ.

$\int e^x \cdot p(x)\, dx$ ← πολυώνυμο

$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) dx}$

$\int e^u \cdot u\, du = \int (e^u)' \cdot u\, du =$

$= e^u \cdot u - \int e^u \cdot (u)' du =$

$e^u \cdot u - \int e^u du =$

$= e^u \cdot u - e^u + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

$= e^{\sin x} \cdot \sin x - e^{\sin x} + c.$

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα. :

25. $\int ln(1-x)dx, \quad \int ln(1-x^2)dx$

$\int \ln x\, dx$

Τρόπος A:

$\ln(\alpha x + \beta)$

$\int \ln(1-x)\, dx = \int (x)' \cdot \ln(1-x) dx$

$= x \cdot \ln(1-x) - \int x \cdot \frac{1}{1-x} dx =$

$= x \ln(1-x) - \int \frac{\boxed{1-x} - \boxed{1}}{1-x} dx$

$= x \ln(1-x) - \int \frac{\cancel{1-x}}{\cancel{1-x}} - \frac{1}{1-x} dx$

$= x \ln(1-x) - \int 1\, dx + \int \frac{1}{1-x} dx$

$= x \ln(1-x) - x - \ln|1-x| + c, \ c \in \mathbb{R}.$

$\int (x)' \ln x\, dx =$

$=$ παραγοντική ολοκλήρωση

$\int \frac{1}{\alpha x + \beta} dx = \frac{\ln|\alpha x + \beta|}{\alpha} + c$

Τρόπος B'

$\int \ln(1-x) dx = -\int \ln u\, du =$

Θέτω $u = 1 - x \rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow \boxed{dx = -du}$

$= -(u \ln u - u) + c$

$= -(1-x) \ln(1-x) + (1-x) + c$

$c \in \mathbb{R}.$

Βλέπε προηγούμενο μάθημα

$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + c$

$= -(1-x)\ln(1-x) + (1-x) + c$, $c\in\mathbb{R}$.

$x\ln x - x + c$

Γενικά, $\int \ln(\alpha x+\beta)\,dx \rightsquigarrow$ αντικατάσταση $u=\alpha x+\beta$

κ.λ.π.

γ' τρόπος

$\int \ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx = \dots$

$\int \ln(1-x)\,dx = -\int (1-x)'\ln(1-x)\,dx =$

$= -\left[(1-x)\ln(1-x) - \int \cancel{(1-x)}\frac{1}{\cancel{1-x}}\cdot(-1)\,dx\right]$

$= -(1-x)\ln(1-x) - x + c$, $c\in\mathbb{R}$.

$$\int \ln(1-x^2)\,dx = \int \ln\left[(1-x)(1+x)\right]dx = \int \ln(1-x)+\ln(1+x)\,dx$$

$= \int \ln(1-x)\,dx + \int \ln(1+x)\,dx$

προηγούμενη άσκηση

$\int \ln(1+x)\,dx = \int \ln u\,du = u\ln u - u + c =$

Θέτω $u = 1+x \Rightarrow du = dx$

$= (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + c$, $c\in\mathbb{R}$.

Διαίρεση πολυωνύμων:

$\Delta(x)$	$\delta(x)$
	$\pi(x)$
$\upsilon(x)$	

Η διαίρεση σταματά όταν $\deg \upsilon(x) < \deg(\delta(x))$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $\boxed{\Delta(x) = \pi(x)\cdot\delta(x) + \upsilon(x)}$

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}}\ , \quad \boxed{\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))}$$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & \pi(x) \\ \upsilon(x) & \end{array} \rightsquigarrow \boxed{P(x) = \pi(x)\,Q(x) + \upsilon(x)}$$

καταχρηστική ρητή συνάρτηση

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pi(x)\cdot Q(x) + \upsilon(x)}{Q(x)} = \frac{\pi(x)\cancel{Q(x)}}{\cancel{Q(x)}} + \frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$$

$$= \pi(x) + \boxed{\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}} \to \text{γνήσια ρητή συνάρτηση}$$

▶ Παράδειγμα 5.1. Η ρητ

$$\frac{x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5}{x^2 - 5x + 3}$$

$$\begin{array}{r|l}
\Delta(x) & \delta(x) \\
\boxed{\boxed{x^4} - 5x^3 + x^2 + 12x - 5} & \boxed{x^2 - 5x + 3} \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^4} + \cancel{5x^3} - 3x^2 & \boxed{x^2 - 2}\ \pi(x) \\ \cline{1-1}
-\cancel{2x^2} + 12x - 5 & \\
+\cancel{2x^2} - 10x + 6 & \\ \cline{1-1}
\boxed{2x + 1} \longrightarrow \upsilon(x) &
\end{array}$$

$$\Delta(x) = \pi(x)\cdot\delta(x) + \upsilon(x) \Rightarrow x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5 = (x^2 - 5x + 3)(x^2 - 2) + 2x + 1$$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x - 5}{x^2 - 5x + 3} = \frac{(x^2 - 5x + 3)(x^2 - 2) + 2x + 1}{x^2 - 5x + 3} =$$

$$\frac{\cancel{(x^2 - 5x + 3)}(x^2 - 2)}{\cancel{x^2 - 5x + 3}} + \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 3} =$$

$$= \underbrace{\boxed{x^2 - 2} + \boxed{\frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 3}}}$$

Ολοκληρώματα γνήσιων ρητών συναρτήσεων:

i) $\boxed{\text{i. } \int \frac{A}{x-a}dx} = A\ln|x-a| + c$

$(x-a)^{-1}$

$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

$\boxed{ii. \int \frac{A}{(x-a)^k}dx, k \neq 1}$

$(x-a)^{-k}$

$= A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$

π.χ $\int \frac{1}{x-1}dx$ και $\int \frac{1}{(x-1)^5}dx$

$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + c$

$\int \frac{1}{(x-1)^5}dx = \int (x-1)^{-5}dx = \frac{(x-1)^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{1}{-4(x-1)^4} + c$

$\boxed{\frac{\boxed{A}}{\boxed{(ax+b)^k}}}$

γνήσια $\deg(P(x)) < 3$

iii) $\boxed{\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ } Μέθοδος του Heaviside

παρενθέσεις 1ου βαθμού

$$\frac{x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x}{x^2(x-1)-(x-1)} = \frac{x}{(x-1)(x^2-1)} =$$

$$= \frac{x}{(x-1)(x-1)(x+1)} = \boxed{\frac{x}{(x-1)^2(x+1)}}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2-3x+2)} = \frac{x+1}{(x-1)(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)} = \frac{\Gamma}{x-a} + \frac{\Delta}{x-b}$$

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{\Gamma}{x-a} + \frac{\Delta}{x-b} + \frac{E}{x-c}$$

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} = \frac{\Gamma}{x-a} + \frac{\Delta}{x-b} + \frac{E}{x-c} + \frac{Z}{x-d}$$

$$\frac{A}{\boxed{(x-a)^2}(x-b)} = \frac{\Gamma}{x-a} + \frac{\Delta}{(x-a)^2} + \frac{E}{x-b}$$

$$\frac{A}{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)} = \frac{\Gamma}{x-a} + \frac{\Delta}{(x-a)^2} + \frac{E}{x-b} + \frac{Z}{(x-b)^2}$$

$$+ \frac{H}{(x-b)^3} + \frac{\Theta}{x-c}$$

Π.χ. $$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\cancel{(x-1)(x-2)} \qquad \cancel{(x-1)}(x-2) \qquad (x-1)\cancel{(x-2)}$$

Π.χ. $\dfrac{x}{\cancel{(x-1)(x-2)}} = \dfrac{A}{\cancel{x-1}} + \dfrac{B}{\cancel{x-2}}$

$$x = A(x-2) + B(x-1)$$

Θέτω $x=1$: $1 = A(1-2) + B(1-1)$

$1 = -A \Rightarrow \boxed{A=-1}$

Θέτω $x=2$: $2 = A(2-2) + B(2-1)$

$\boxed{2 = B}$