Notes 7_11_2024

S.O.S.

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων απλών κλασμάτων

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

$P(x)$, $Q(x)$ = πολυώνυμα

1) $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ $\left(\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{καταχρηστική συνάρτηση} \right)$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & \pi(x) \\ \upsilon(x) & \end{array}$$

$\deg \upsilon(x) < \deg Q(x)$

$$\boxed{P(x) = \pi(x)\cdot Q(x) + \upsilon(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pi(x)\cdot Q(x)+\upsilon(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \boxed{\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}} \to \text{γνήσια ρητή συνάρτηση}$$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + c$$

→ κανόνας δύναμης

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \int A\cdot(x-a)^{-k}\,dx = \quad k\neq 1$$

$$= A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

$$\int \boxed{\frac{A}{ax^2+bx+\gamma}}\,dx$$

$\Delta=0$, $ax^2+bx+\gamma = a(x-x_1)^2$

$\Delta>0$, $ax^2+bx+\gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$

$$\frac{A}{ax^2+bx+\gamma} = \boxed{\frac{A}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{B}{x-x_1} + \frac{\Gamma}{x-x_2}}$$

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+\gamma}\,dx = \int \frac{A}{a(x-x_1)^2}\,dx$$

► Άσκηση 6.1. **(Βλέπε ->Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου XII)**

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+1}{2x^2-10x+12}\,dx$$

→ γνήσια ρητή συνάρτηση

$$2x^2-10x+12 = 2(x^2-5x+6) = 2(x-3)(x-2)$$

$$\frac{x+1}{2x^2-10x+12} = \boxed{\frac{x+1}{2(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}}$$

(πολλαπλασιασμός με $2(x-3)(x-2)$)

$$x+1 = 2A(x-2) + 2B(x-3)$$

Θέτω $x=2$: $2+1 = -2B \Rightarrow \boxed{B=-3/2}$

Θέτω $x=3$: $3+1 = 2A(3-2) \Rightarrow \boxed{A=2}$

Άρα, $$\int \frac{x+1}{2x^2-10x+12}\,dx = \int \frac{2}{x-3} + \frac{-3/2}{x-2}\,dx$$

$$2\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{3}{2}\int\frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$2\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x-2| + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Π.χ. $$\int \frac{5}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx = 5\,\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

↓ κανόνας

π.χ. $\int \frac{5}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx = 5\,\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + C$

$x^2-4x+4 = (x-2)^2$

$\Delta = 0$

κανόνας της δύναμης

$-5(x-2)^{-1} + C.$

π.χ. $\int \frac{5x}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{5x}{(x-2)^2}\,dx$

$$\boxed{\frac{5x}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)^1} + \frac{B}{(x-2)^2}}$$

$5x = A(x-2) + B$

Θέτω $x=2$: $\boxed{10 = B}$

Θέτω $x=0$: $0 = -2A + B \Rightarrow B = 2A$ $\boxed{A = 5}$

$\int \frac{5x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{5}{x-2} + \frac{10}{(x-2)^2}\,dx =$

$= 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = 5\ln|x-2| + 10\,\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + C$

$= 5\ln|x-2| - 10(x-2)^{-1} + C,\ C\in\mathbb{R}.$

▶ Παράδειγμα 6.1. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$$

$\deg(x^2+x+1) = 2 < \deg[(x-1)(x-2)(x-3)] = 3$

γνήσια ρητή συνάρτηση

$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{x-3}$

$x^2+x+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + \Gamma(x-1)(x-2)$

Θέτω $x=1$: $3 = 2A \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}}$

Θέτω $x=2$: $7 = -B \Rightarrow \boxed{B = -7}$

Θέτω $x=3$: $13 = 2\Gamma \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{13}{2}}$

Μέθοδος του Heaviside

$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = \int \frac{3/2}{x-1} + \frac{-7}{x-2} + \frac{13/2}{x-3}\,dx$

$= \frac{3}{2}\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + \frac{13}{2}\ln|x-3| + C,\ C\in\mathbb{R}.$

▶ Άσκηση 6.2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$$

$x^2 - Sx + P$

sum $= x_1 + x_2$

product $= x_1 \cdot x_2$

$\hookrightarrow x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6)$

$= x(x-2)(x+3)$

$x_1 + x_2 = -1$

$x_1 x_2 = -6$

$x_1 = 2$

$x_2 = -3$

$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\,dx$

$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{x+3}$

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{x+3}$$

$$x+1 = A(x-2)(x+3) + B\cdot x(x+3) + \Gamma \cdot x\cdot(x-2)$$

Θέτω $x=0$: $1 = -6A \Rightarrow \boxed{A = -1/6}$

Θέτω $x=2$: $3 = 10B \Rightarrow \boxed{B = 3/10}$

Θέτω $x=-3$: $-2 = 15\Gamma \Rightarrow \boxed{\Gamma = -2/15}$

Άρα, $\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{2}{15}\int \frac{1}{x+3}dx$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{(x-2)^2} + \frac{\Delta}{(x-3)} + \frac{E}{(x-3)^2} + \frac{Z}{(x-3)^3}$$

► **Άσκηση 6.5.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4}dx$$

$\deg(2x^3 - 8x^2 + 9x + 1) > \deg(x^2 - 4x + 4)$ → καταχρηστική ρητή συνάρτηση.

$$\begin{array}{r|l} \boxed{2x^3} - 8x^2 + 9x + 1 & \boxed{x^2} - 4x + 4 \\ -2x^3 + 8x^2 - 8x & 2x \\ \hline x + 1 & \end{array}$$

$2x^3 - 8x^2 + 9x + 1 = 2x(x^2 - 4x + 4) + x + 1$

$$\frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x(x^2 - 4x + 4) + x + 1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x\cancel{(x^2 - 4x + 4)}}{\cancel{x^2 - 4x + 4}} + \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \boxed{2x} + \boxed{\frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}}$$

Άρα, $I = \int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4}dx = \underbrace{\boxed{\int 2x\,dx}}_{= I_1} + \underbrace{\boxed{\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}dx}}_{= I_2}$

$$I_1 = \int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

$$I_2 = \int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}dx$$

$$\frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} = \boxed{\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}}$$

$$x + 1 = A(x-2) + B$$

Θέτω $x=2$: $\boxed{3 = B}$

Θέτω $x=-1$: $0 = -3A + B \Rightarrow A = \frac{B}{3}$

$\boxed{A = 1}$

$$I_2 = \int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}dx =$$

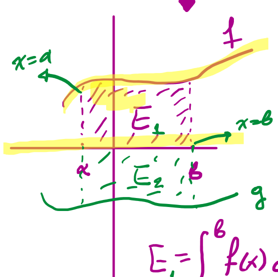
$\boxed{A=1}$

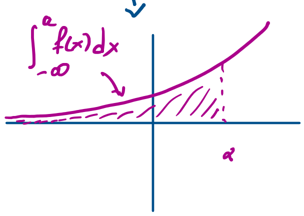
$$I_2 = \int \frac{x+1}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}\,dx =$$

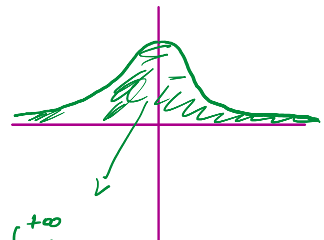
$$\ln|x-2| + 3\,\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + c.$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$



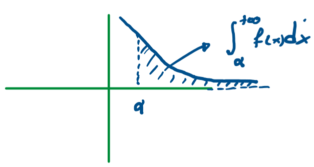




$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$E_1 = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \ , \ f>0$$

$$E_2 = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$



α) Αν το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx = c$, $c \in \mathbb{R}$ τότε θα λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει στο c.

Ομοίως για το $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$

β) Αν το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx = \pm\infty$ τότε θα λέμε ότι το γεν. ολοκλ. αποκλίνει.

γ) Το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ θα λέμε ότι συγκλίνει όταν για τυχαίο αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ τα γεν. ολοκλ. $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$

συγκλίνουν.

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Αν ένα από τα δυο ή και τα δύο αποκλίνουν τότε το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.

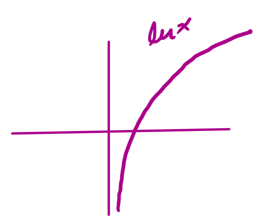
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad f(x) = \begin{cases} \boxed{A(x)}, & x \geq 4 \\ \boxed{\dfrac{x+1}{x^3 - x^2 + 6x + 7}}, & 0 < x < 4 \\ \boxed{B(x)}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{-\infty}^{0} B(x)\,dx + \int_{0}^{4} \frac{x+1}{x^3 - x^2 + 6x + 7}\,dx + \int_{4}^{+\infty} A(x)\,dx$$

Π.χ. $I_1 = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$, $I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{\alpha}^{k} f(x)\,dx}$$

$$I_1 = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{k \to +\infty} \boxed{\int_{1}^{k} \frac{1}{x}\,dx} =$$



$$= \lim_{k \to +\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^k = \lim_{k \to +\infty} \big(\ln k - \cancel{\ln 1}^{\,0}\big)$$

$$= +\infty$$ αποκλίνει.

Π.χ. $$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^k = \lim_{k \to +\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^k =$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left(-\cancel{\frac{1}{k}}^{\,0} + 1\right) = \underline{1}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(-\cancel{\tfrac{1}{k}}+1\right)=\underline{1}$$

<u>Γενικά:</u> $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_1^k \frac{1}{x^p}dx=\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^k=$

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k^{\boxed{-p+1}}}{-p+1}-\boxed{\frac{1}{-p+1}}\right)$$

$\lim_{k\to+\infty} k^p=+\infty,\ p>0$

$\lim_{k\to+\infty} k^p=0,\ p<0\ \left(\frac{1}{\infty}\right)$

- Για $-p+1>0\Rightarrow\boxed{p<1}$ τότε $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=+\infty$ (αποκλίνει)

- Για $-p+1<0\Rightarrow\boxed{p>1}$ τότε $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\cancel{k^{-p+1}}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=-\frac{1}{-p+1}$ (συγκλίνει)

- Για $-p+1=0\Rightarrow\boxed{p=1}$

$\int\frac{1}{x}dx=$ αποκλίνει

<u>Συνοδικά,</u>
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}-\frac{1}{-p+1} & p>1 \quad \text{συγκλίνει}\\ \text{αποκλίνει} & p\le 1\end{cases}$$

<u>π.χ.</u>
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}x\cdot e^{-x^2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_{-\infty}^0 x\cdot e^{-x^2}dx=\lim_{k\to-\infty}\int_k^0 x\cdot e^{-x^2}dx=$$

Θέτω $u=-x^2$

$\frac{du}{dx}=-2x$

$\boxed{dx=\frac{du}{-2x}}$

Για $x=k,\ u=-k^2$

Για $x=0,\ u=0$

$$\lim_{k\to-\infty}\int_{-k^2}^{0}\cancel{x}\cdot e^{u}\cdot\frac{du}{-2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\lim_{k\to-\infty}\int_{-k^2}^{0} e^{u}\,du =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{k\to-\infty}\Big[e^{u}\Big]_{-k^2}^{0} = -\frac{1}{2}\lim_{k\to-\infty}\left(1-\cancel{e^{-k^2}}\right) =$$

$$\frac{1}{e^{k^2}} = \frac{1}{\infty}\to 0$$

$$= -1/2$$

$$I_2 = \int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{0}^{k} x\cdot e^{-x^2}\,dx =$$

Θέτω $u=-x^2$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\int_{0}^{-k^2} e^{u}\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\Big[e^{u}\Big]_{0}^{-k^2} = -\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(\cancel{e^{-k^2}} - e^{0}\right) = +\frac{1}{2}$$

Άρα, το $I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ (συγκλίνει).