(Άλυτη Άσκηση Κεφ. V) Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης:

128. $f(x) = x^{\sin x}$

$$\boxed{h(x) = f(x)^{g(x)}}$$

$\cancel{\alpha^{f(x)}}$ $\cancel{f(x)^{k}}$

Ά τρόπος: Λογαριθμική παραγώγιση

$$f(x) = x^{\sin x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln x^{\sin x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ln \theta^{k} = k \cdot \ln \theta}$$

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow$$

$$[\ln f(x)]' = [\sin x \cdot \ln x]' \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)}$$

Β' τρόπος:

$$\boxed{e^{\ln \theta} = \theta}$$

$$\theta = f(x)^{g(x)}$$

$$f(x) = \underbrace{\boxed{x^{\sin x}}}_{\theta} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln x}$$

$$f(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} \longrightarrow \left| \left[e^{h(x)}\right]' = \right.$$

$f(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} \longrightarrow \left[e^{h(x)}\right]' = e^{h(x)} \cdot h'(x)$

$$f'(x) = \left[e^{\sin x \cdot \ln x}\right]' = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot (\sin x \cdot \ln x)'$$

$$= \underbrace{e^{\sin x \cdot \ln x}}_{f(x)} \cdot \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = f(x) \cdot \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$k(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = \qquad e^{\ln \theta} = \theta$$

$$= e^{\ln^2 x}$$

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. VI) ▶Άσκηση 5.7. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$\boxed{\text{De L'Hospital}}$

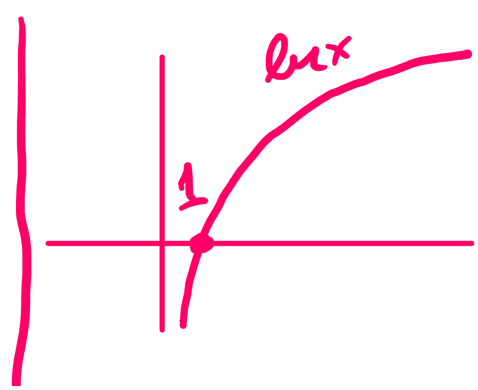
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \ \acute{\eta} \ \boxed{\begin{matrix} \infty \\ \infty \end{matrix}}$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) =$$

$x_0 \in \mathbb{R}$

ή $x_0 \to +\infty$, $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{1}$$



$x \to +\infty \quad x \quad DLH \quad 1$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} 2\frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Να ταιριάξω όλες τις περιπτώσεις παραγοντικής ολοκλήρωσης

$$\int P(x)\cdot \ln x\, dx$$

(Λυμένο Παράδειγμα Κεφ. XII)

▶**Παράδειγμα 2.1.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

iii. $\int x^n \ln x \; dx$

$$\int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \cdot \ln x\, dx =$$

$(\ln x)'$

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\, dx =$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\, dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} + c =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

П.х. $I = \int e^x \cdot \sin x \, dx$ $\qquad$ $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$$I = \int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \cdot \sin x \, dx =$$

$$e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot (\sin x)' \, dx = e^x \cdot \sin x - \underbrace{\int e^x \cdot \cos x \, dx}_{} =$$

$$e^x \cdot \sin x - \int (e^x)' \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x + \int e^x \sin x \, dx\right)$$

$$= e^x \cdot \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow$$

$$I = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - I \Rightarrow$$

$$2I = e^x \cdot \sin x - e^x \cos x \Rightarrow$$

$$I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + c \, , \quad c \in \mathbb{R}.$$

▶ **Παράδειγμα 5.4.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

S.O.S.

$$\int \frac{4}{2x^2-4x-8}\,dx = \int \frac{2}{x^2-2x-4}\,dx$$

$x^2-2x-4=0$, $\Delta = 20 \to \sqrt{20}$

$x_{1,2} = \frac{+2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \; \to 1+\sqrt{5}, \; \to 1-\sqrt{5}$

$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$ $(\Delta>0)$

$x^2-2x-4 = (x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$

$$\frac{2}{x^2-2x-4} = \frac{2\cancel{(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})}}{\cancel{(x-1-\sqrt{5})\cdot(x-1+\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{A\cancel{(x-1-\sqrt{5})}(x-1+\sqrt{5})}{\cancel{x-1-\sqrt{5}}} + \frac{B\,(x-1-\sqrt{5})\cancel{(x-1+\sqrt{5})}}{\cancel{x-1+\sqrt{5}}}$$

$\Rightarrow 2 = A(x-1+\sqrt{5}) + B(x-1-\sqrt{5})$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

βαθμός$(P(x)) \geq$ βαθμός$(Q(x))$

κάνουμε $\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline \upsilon(x) & \pi(x) \end{array}$

βαθμός$(P(x)) <$ βαθμός$(Q(x))$

$\downarrow$

απλά κλάσματα.

$$\boxed{\int \frac{1}{\alpha x+\beta}\,dx = \frac{\ln|\alpha x+\beta|}{\alpha} + c}$$

Για $x = 1+\sqrt{5}$

$2 = A\cdot(\cancel{1}+\sqrt{5}\cancel{-1}+\sqrt{5}) + \cancel{B(1+\sqrt{5}-1-\sqrt{5})}^{0} \Rightarrow$

$2 = 2\sqrt{5}A \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

Για $x = 1-\sqrt{5}$

$2 = \cancel{A\cdot(1-\sqrt{5}-1+\sqrt{5})}^{0} + B(\cancel{1}-\sqrt{5}\cancel{-1}-\sqrt{5})$

$2 = -2\sqrt{5}\cdot B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$$\int \frac{4}{2x^2-4x-8}\,dx = \int \frac{2}{x^2-2x-4}\,dx = \int \frac{A}{x-1-\sqrt{5}} + \frac{B}{x-1+\sqrt{5}}\,dx$$

$$= \int \frac{1/\sqrt{5}}{x-1-\sqrt{5}}\,dx + \int \frac{-1/\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \ln|x-1-\sqrt{5}| - \frac{1}{\sqrt{5}} \ln|x-1+\sqrt{5}| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\ln|x-1-\sqrt{5}| - \ln|x-1+\sqrt{5}| \right) + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| \frac{x-1-\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(Άλυτη Άσκηση Κεφ. XIII - βλέπε Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου)

1. Η συνάρτηση των οριακών εσόδων μιας μονοπωλιακής επιχείρησης είναι η ακόλουθη:

   $MR(q) = 60 - 2q - 2q^2$

   Αν τα σταθερά έσοδα είναι μηδέν, να βρεθούν:

$TR(0) = 0$

$TR = P \cdot Q$

i. η συνάρτηση των συνολικών εσόδων $TR(q)$

ii. η συνάρτηση ζήτησης $P_d(q)$ (*Υπόδειξη*: ισχύει ότι $TR(q) = P_d(q) \cdot q$)

iii. τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης ζήτησης, δεδομένου ότι η συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την οικονομική συνθήκη να είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

i) $TR(Q) = \int MR(Q)\,dQ = \int 60 - 2Q - 2Q^2\,dQ =$

$= 60Q - Q^2 - 2\frac{Q^3}{3} + c \Rightarrow \boxed{TR(Q) = 60Q - Q^2 - \frac{2Q^3}{3} + c}$

$TR(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 - 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$

$TR(0)=0 \Rightarrow 0=0-0-0+c \Rightarrow \boxed{c=0}$

Άρα, $\boxed{TR(Q)=60Q-Q^2-\frac{2Q^3}{3}}$

ii) $TR(Q)=P(Q)\cdot Q \Rightarrow P(Q)=\frac{TR(Q)}{Q}$

$$P(Q)=\frac{60Q-Q^2-\frac{2}{3}Q^3}{Q} \Rightarrow \boxed{P(Q)=60-Q-\frac{2}{3}Q^2}$$

$Q\geq 0$, $P\geq 0$

$P'(Q)\leq 0$

ζήτηση

$Q\geq 0$, $P\geq 0$

$P'(Q)\geq 0$

προσφορά

iii) $Q\geq 0$, $P\geq 0$, $P'(Q)\leq 0$

$$P'(Q)=-1-\frac{4}{3}Q\leq 0 \Rightarrow \frac{4}{3}Q\geq -1 \Rightarrow Q\geq -\frac{3}{4}$$

<u>Πεδίο ορισμού</u>: $Q\in[0,+\infty)$

$Q\geq 0$, $P(Q)\downarrow$

$\underline{Q\geq 0} \xRightarrow{P\downarrow} P(Q)\leq P(0)$

$0\leq P(Q)\leq 60$

$\alpha<\beta,\ f\uparrow \Rightarrow f(\alpha)<f(\beta)$
$\alpha<\beta,\ f\downarrow \Rightarrow f(\alpha)>f(\beta)$

$\alpha\leq x\leq\beta \xRightarrow{f\uparrow} f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)$

Σύνολο τιμών: $P \in [0, \infty]$

(Άλυτη Άσκηση Κεφ. XIII - βλέπε Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου)

1. Αν η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι

$$MC(q) = -\frac{100}{q^2} + \frac{1}{4} = TC'(Q)$$

και η συνάρτηση του συνολικού κόστους έχει ελάχιστη τιμή 10 νομισματικών μονάδων, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης.

Το συνολικό κόστος έχει ελάχιστη τιμή 10 νομ. μονάδων σημαίνει ότι για κάποιο Q_0 ισχύει

$$TC'(Q_0) = 0 \quad , \quad TC(Q_0) = 10 \rightarrow \text{ελαχ. τιμή}$$

$$TC = \int MC(Q)\,dQ = \int -\frac{100}{Q^2} + \frac{1}{4}\,dQ =$$

$$= \frac{100}{Q} + \frac{1}{4}Q + c \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{Q^2}\,dQ = -\frac{1}{Q} + c$$

$$\boxed{TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{1}{4}Q + c}$$

$$TC'(Q) = 0 \Rightarrow -\frac{100}{Q^2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$Q^2 = 400 \quad \boxed{Q = 20} \text{ ή } Q = -20$$

$$Q^2 = 400 \Rightarrow \boxed{Q = 20} \text{ ή } Q = -20 \text{ απορ.}$$

$$TC''(Q) = 200Q^{-3} = \frac{200}{Q^3}$$

$$TC''(20) = \frac{200}{20^3} > 0$$

Οπότε για $Q = 20$ έχουμε ελάχιστη τιμή του συνολικού κόστους.

Άρα, αφού λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $Q=20$ και η ελαχ. τιμή είναι 10 (βλέπε εκφώνηση)

θα έχουμε $\boxed{TC(20) = 10}$

Όμως, $TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{1}{4}Q + c \xRightarrow{Q=20}$

$$10 = \frac{100}{20} + \frac{1}{4}20 + c \Rightarrow$$

$$10 = 5 + 5 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

Δηλ. $\boxed{TC(Q) = \frac{100}{Q} + \frac{1}{4}Q}$

Π.χ. Αν το οριακό κόστος δίνεται από τη συνάρτηση

$MC(Q) = -\frac{100}{\ldots} + \frac{1}{\ldots}$, να βρεθεί το

$$MC(Q) = -\frac{100}{Q^2} + \frac{1}{4}$$, ν.α βρεθεί το κόστος παραγωγής των πρώτων 4 μονάδων προϊόντος.

κόστος παραγωγής των πρώτων 4 μονάδων =

$$= \int_0^4 MC(Q)\,dQ = \int_0^4 \frac{-100}{Q^2} + \frac{1}{4}\,dQ = \cdots$$

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. XIII) ▶ **Άσκηση 7.10.** Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για ένα προϊόν είναι αντίστοιχα:

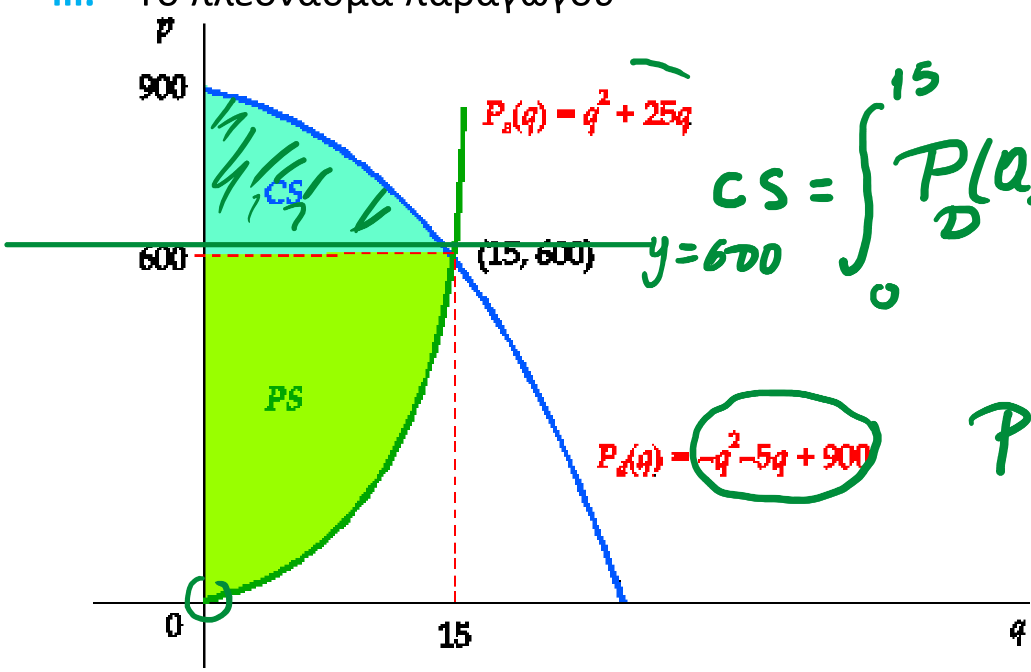
$P_d(q) = -q^2 - 5q + 900$ και $P_s(q) = q^2 + 25q$

όπου η ποσότητα μετριέται σε χιλιάδες μονάδες και η τιμή σε ευρώ. Ζητούνται:

i. Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας

ii. Το πλεόνασμα καταναλωτή

iii. Το πλεόνασμα παραγωγού



$$CS = \int_0^{15} P_D(Q) - 600\,dQ$$

$$PS = \int_0^{15} 600 - P_s(Q)\,dQ$$

i) $P_D = P_S$ ... $Q^2 + 25Q = -Q^2 - 5Q + 900$

i) $P_D = P_S \Rightarrow Q^2 + 25Q = -Q^2 - 5Q + 900$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow Q = 15$ ή $Q = -30$ απορ.

$Q = 15 \rightarrow P_D(15) = \ldots = 600$

Σημείο ισορροπίας $(Q^*, P^*) = (15, 600)$

ii) $CS = \int_0^{15} P_D(Q) - 600\, dQ =$

$$\int_0^{15} -Q^2 - 5Q + 900 - 600\, dQ = \left[-\frac{Q^3}{3} - \frac{5Q^2}{2} + 300Q\right]_0^{15}$$

$$= -\frac{15^3}{3} - 5 \cdot \frac{15^2}{2} + 300 \cdot 15 - 0 = 2812.5 €$$

iii) $PS = \int_0^{15} 600 - P_S(Q)\, dQ = \int_0^{15} 600 - Q^2 - 25Q\, dQ =$

$$= \left[600Q - \frac{Q^3}{3} - \frac{25Q^2}{2}\right]_0^{15} = \ldots = 5062.5.$$

(Λυμένη Άσκηση Κεφ. XIII) ►**Άσκηση 7.11.** Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν του οποίου η συνάρτηση ζήτησης είναι

$$P_d(q) = -\frac{2}{3}q^2 - 8q + 2600$$

και η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι

$$TC(q) = 2q^2 + 200q + 3000$$

Η τιμή του προϊόντος μετριέται σε ευρώ και η ποσότητα q σε τόνους. Ζητούνται:

i. Να βρεθεί ο αριθμός μονάδων και η τιμή μονάδας που μεγιστοποιούν τα κέρδη.

ii. Να βρεθεί το πλεόνασμα καταναλωτή αν το προϊόν πωλείται στην τιμή που η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της.

i) $TR(Q) = P \cdot Q = \left(-\frac{2}{3}Q^2 - 8Q + 2600\right) \cdot Q =$

$= -\frac{2}{3}Q^3 - 8Q^2 + 2600Q$

$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -\frac{2}{3}Q^3 - 8Q^2 + 2600Q - 2Q^2 - 200Q - 3000$

$$\boxed{\Pi(Q) = -\frac{2}{3}Q^3 - 10Q^2 + 2400Q - 3000}$$

$\Pi'(Q) = -2Q^2 - 20Q + 2400$

$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 30$ ή $\underline{Q = -40 \text{ απορ.}}$

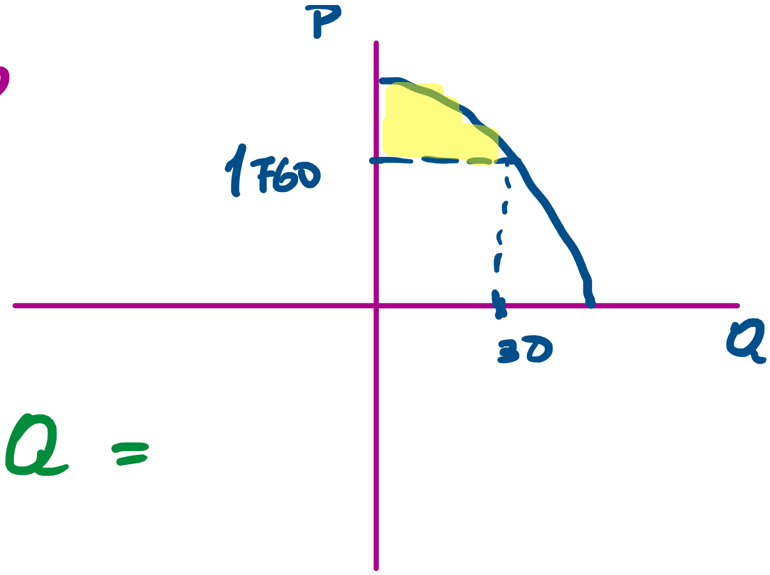
$\Pi''(Q) = -4Q - 20$, $\Pi''(30) = -4 \cdot 30 - 20 < 0$

Άρα, για $Q = 30$ μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

ii) Για $Q = 30$, $P(30) = -\frac{2}{3}30^2 - 8 \cdot 30 + 2600$

P

$P(30) = 1760$



$$\boxed{P_D(Q) = -\frac{2}{3}Q^2 - 8Q + 2600}$$

$$CS = \int_0^{30} P_D(Q) - 1760 \, dQ =$$

$$= \int_0^{30} -\frac{2}{3}Q^2 - 8Q + 2600 - 1760 \, dQ =$$

$$= \dots = \underline{15600.}$$