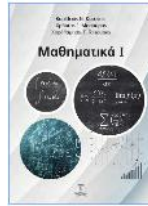


Η Παράγωγος - Κεφάλαιο V

Σύγγραμμα: Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση, Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

Link: <https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0>

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874



Ημερομηνία διάλεξης: 02-10-2025

Τύποι, Ορισμοί & Θεωρήματα (Βιβλίο-Κεφάλαιο V) :

- ★ Έστω μια συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) στο x_0 αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

- 💡 Αν η f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, b) , τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο διάστημα (a, b) .

- ✎ **Θεώρημα 4.1.** Αν μία συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a, b) , τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο σημείο x_0 .

★ 5. Κανόνες παραγωγίσιμης

Θεώρημα 5.1. Αν οι $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_0 \in (a, b)$, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Θεώρημα 5.2. Αν η $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0 \in (a, b)$, και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση λf είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

Θεώρημα 5.3. Αν οι $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_0 \in (a, b)$, τότε το γινόμενο τους $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

[f'(x) · g(x) + f(x) · g'(x)] = f'(x) · g(x) + f(x) · g'(x)

Θεώρημα 5.4. Αν οι $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_0 \in (a, b)$, και επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε το πηλίκο τους $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

→ κανόνας παραγώγισης πηλίκων

Θεώρημα 5.5. (κανόνας της αλυσίδας) Αν η $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$, και η $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 και ισχύει:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

(e^{x^2+1})' = e^{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = 2x \cdot e^{x^2+1}

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = e^{\bar{x}+1} \cdot (x^2+1)' = 2x \cdot e^{\bar{x}+1}$$

Παραδείγματα - Ασκήσεις:

► **Παράδειγμα 4.9.** Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$, είναι συνεχής στο 0.

Όμως η συνάρτηση αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Πράγματι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

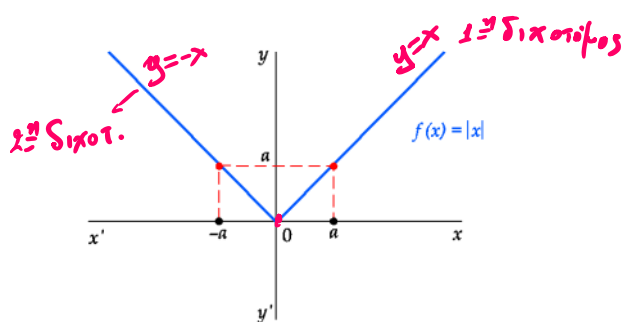
ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Επομένως το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ δεν υπάρχει και συνεπώς η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$



Τύποι παραγώγων βασικών συναρτήσεων

$$y = c$$

$$y' = 0$$

$$y = x$$

$$y' = 1$$

$$y = x^n$$

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y = x^{-n}$$

$$y' = -nx^{-n-1}$$

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2} \right)' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$y = x^a$$

$$y' = ax^{a-1}$$

$$y = a^x$$

$$\left(2^x \right)' = 2^x \cdot \ln 2$$

$$y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \sin x$$

↳ sin κς = ημίτονο

$$y' = \cos x$$

$$y = \cos x$$

↳ cos κς

$$y' = -\sin x$$

$$y = \tan x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

↳ cosinus.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

↳ ταμπερνα = εφαπτήρινη

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

↳ ταμπερνα = συνεφαπτήρινη.

► **Άσκηση 2. (Βλέπε -> Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου V)** Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{e^x}{3x^4}$ ii. $f(x) = \frac{e^{(8+x)^2}}{x^3}$

Λύση.

$$(i) f'(x) = \left(\frac{e^x}{3x^4} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot 3x^4 - e^x (3x^4)'}{(3x^4)^2} = \frac{3x^4 e^x - 12x^3 e^x}{9x^8} =$$

$$= \frac{3x^3 e^x (x - 4)}{9x^8} = \frac{e^x (x - 4)}{3x^5}$$

$$(ii) f'(x) = \left[\frac{e^{(8+x)^2}}{x^3} \right]' = \frac{[e^{(8+x)^2}]' x^3 - e^{(8+x)^2} (x^3)'}{x^6} =$$

$$= \frac{e^{(8+x)^2} [(8+x)^2]' x^3 - e^{(8+x)^2} 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{e^{(8+x)^2} 2(8+x)(8+x)' x^3 - 3x^2 e^{(8+x)^2}}{x^6} =$$

$$= \frac{2x^3 e^{(8+x)^2} (8+x) - 3x^2 e^{(8+x)^2}}{x^6} = \frac{e^{(8+x)^2} [2(8+x)x - 3]}{x^4}$$

► **Άσκηση 8. (Βλέπε -> Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου V)** Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln(x^2 + 5)$ ii. $f(x) = \ln[x + \sqrt{x^2 + 1}]$

iii. $f(x) = (x^2 - 1) \ln(x^2 + 1)$

Λύση.

$$(i) f'(x) = [\ln(x^2 + 5)]' = \frac{1}{x^2 + 5} (x^2 + 5)' = \frac{2x}{x^2 + 5}$$

$$(ii) f'(x) = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(iii) f'(x) = [(x^2 - 1) \ln(x^2 + 1)]' = (x^2 - 1)' \ln(x^2 + 1) + (x^2 - 1) [\ln(x^2 + 1)]'$$

$$= 2x \ln(x^2 + 1) + (x^2 - 1) \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = 2x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} =$$

$$= 2x \left[\ln(x^2 + 1) + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right]$$

► Άσκηση 19. (Βλέπε -> Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου V)

Αν $x > 0$, να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^x$

Λύση.

$$\ln(x^x) = x \ln x$$

Λογαριθμίζοντας έχουμε: $\ln f(x) = x \ln x$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της ισότητας λαμβάνουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\text{Άρα, } f'(x) = (\ln x + 1)x^x$$

Ημερομηνία διάλεξης: 09-10-2025

(Βλέπε -> Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου V*)

*Στο βιβλίο είναι άλυτες ασκήσεις

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

$$14. f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$15. f(x) = 3x^3 \ln x - x^3$$

$$54. f(x) = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2$$

$$59. f(x) = x^{\ln x}$$

$$14. f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

Λύση: $f'(x) = (2x+2) \cdot e^{-x} + (x^2+2x+2) \cdot (-e^{-x})$

$$= e^{-x} (2x+2 - x^2 - 2x - 2)$$

$$= \underline{\underline{-x^2 \cdot e^{-x}}}$$

$$15. f(x) = 3x^3 \ln x - x^3$$

Λύση: $f'(x) = 9x^2 \cdot \ln x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2$

Λύση: $f'(x) = 9x^2 \cdot \ln x + 3x \cdot \frac{1}{x} - 3x^2$
 $= 9x^2 \cdot \ln x + \cancel{3x} - \cancel{3x} = 9x^2 \cdot \ln x.$

54. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)^2$

Λύση: $f'(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right) \cdot \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)' =$

$(\sin x)' = \cos x$
 $(\cos x)' = -\sin x$

$2 \sin x \cos x = 1$

$= \frac{2 \sin x}{1+\cos x} \cdot \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} =$

$= \frac{2 \sin x \cdot (\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x)}{(1+\cos x)^3} =$

$= \frac{2 \sin x (\cos x + 1)}{(1+\cos x)^3} = \frac{2 \sin x}{(1+\cos x)^2}.$

59. $f(x) = x^{\ln x}$

Λύση:

$f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2}$

$\ln x \cdot \ln x$

$(\ln x)^2$

$g(x)$
 $f(x)$

$\ln^2 x = (\ln x)^2$
 $\ln x^2$

$f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot [(\ln x)^2]' = e^{(\ln x)^2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \frac{2 \ln x}{x}$

Εργασία για το σπίτι: Λύνουμε τις παρακάτω λυμένες ασκήσεις-παραδείγματα του βιβλίου για εξάσκηση.

► **Παράδειγμα 6.2.** Ομοίως για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης

$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

λαμβάνουμε τους λογαρίθμους αμφοτέρων των μελών και έχουμε:

$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln(\cos x)$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε:

$[\ln f(x)]' = [\sin x \cdot \ln(\cos x)]' \text{ ή } \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}$

Άρα

$f'(x) = \left[\cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} \right] (\cos x)^{\sin x} =$

$= [\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \tan x] (\cos x)^{\sin x}.$

► **Άσκηση 5.** Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = (5x - 3)^2$$

Λύση. Είναι:

$$f'(x) = [(5x - 3)^2]' = 2(5x - 3)(5x - 3)' = 2(5x - 3) \cdot 5 = 10(5x - 3)$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = [10(5x - 3)]' = 10(5x - 3)' = 10 \cdot 5 = 50$$

► **Άσκηση 6.** Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \sqrt{14 - 3x}, x \leq \frac{14}{3}$$

Λύση. Η πρώτη παράγωγος είναι:

$$f'(x) = (\sqrt{14 - 3x})' = \frac{(14 - 3x)'}{2\sqrt{14 - 3x}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{14 - 3x}}$$

Επομένως:

$$f''(x) = [f'(x)]' = -\frac{3}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{14 - 3x}} \right]' = -\frac{3}{2} \left[-\frac{\sqrt{14 - 3x}}{14 - 3x} \right] =$$

$$= \frac{3}{2(14 - 3x)} \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{14 - 3x}} = \frac{9}{4(14 - 3x)^{\frac{3}{2}}}.$$