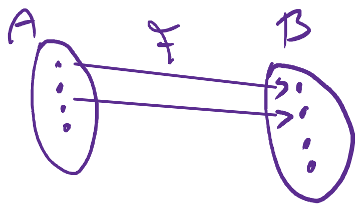
Μαθηματικά Ι (Φροντιστήριο)

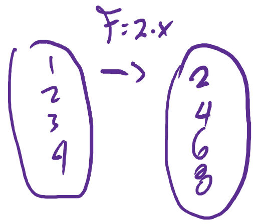
Σημειώσεις Διαλέξεων

Διδάσκων: Σπυρίδων Δ. Μουρτάς

eClass ΕΚΠΑ: ECON299

Πραγματικές συναρτήσεις





Πραγματικές συναρτήσεις

Συνάρτηση f από ένα μη κενό σύνολο A σε ένα μη κενό σύνολο B λέγεται μια σχέση με την οποία κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο y του συνόλου B, και συμβολίζεται

υποσύνολο

$f: A \to B$ ή $y = f(x)$

Εάν τα σύνολα A και B είναι υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{R}$των πραγματικών αριθμών ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) τότε η f θα ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση** και ισχύει:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Το στοιχείο x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ή πρότυπο και το στοιχείο y, που αντιστοιχεί στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** ή εικόνα του x και συμβολίζεται ως $f(x)$.

Το σύνολο A όλων των x ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και θα το συμβολίζουμε $D(f)$. Το σύνολο B όλων των εικόνων $f(x)$ ονομάζεται **πεδίο τιμών** της f και θα το συμβολίζουμε $R(f)$.

Βασικές μαθηματικές συναρτήσεις

1. Σταθερή: $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
2. Γραμμική (Ευθεία): $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$
3. Τετραγωνική (Πολυώνυμο 2ου βαθμού): $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$
4. Ομογραφική: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$
5. Πολυωνυμικές: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
6. Ρητές: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x), Q(x)$ πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού
7. Εκθετική: $f(x) = a^x, a > 0$
8. Λογαριθμική: $f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1$
9. Τριγωνομετρικές: $f(x) = \eta\mu x, f(x) = \sigma\upsilon\nu x, f(x) = \varepsilon\varphi x$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(a) $f(x) = x^3$

(b) $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{2\}$

Λάθος:

$\cancel{\dfrac{x^2-4}{x-2}} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$= x + 2 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(a) $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

$x - 1 \geq 0 \Rightarrow$ Π.Ο. $x \in [1, +\infty)$

(b) $\dfrac{x+1}{x-1}$

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow$ Π.Ο. $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

1.α) Π.Ο. $\mathbb{R}$

1.β) Π.Ο.

$(x-1)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$

ή $x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$

1.γ) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$\rho_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ ↗ 3, ↘ 2

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

Π.Ο. $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

Ακολουθίες

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Ακολουθίες

Ακολουθία ονομάζεται μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$ και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Δηλαδή, χαρακτηρίζουμε **ακολουθία** κάθε συνάρτηση της μορφής

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Οι ακολουθίες συμβολίζονται με μικρά γράμματα, π.χ. a. Η **εικόνα** του αριθμού $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(n)$, ονομάζεται n-οστός όρος της ακολουθίας και συνήθως συμβολίζεται a_n ή $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ή $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$.

Ο a_{n+1} ονομάζεται **επόμενος** του a_n και ο a_n **προηγούμενος** του a_{n+1}.

Οι ακολουθίες μπορούν να αναπαρασταθούν

- δι' αναγραφής, π.χ. $2, 4, 6, 8, \ldots$
- ή δι' ενός γενικού τύπου, $\longrightarrow \alpha_n = n+2$
- ή με μία αναδρομική σχέση όπου θα πρέπει να δίνονται οι **αρχικές τιμές** των πρώτων όρων της ακολουθίας.

π.χ. $\alpha_n = \alpha_{n-1} + 2$

Πράξεις μεταξύ ακολουθιών:

- Ισότητα
- Άθροισμα
- Διαφορά
- Γινόμενο
- Πηλίκο
- Γινόμενο πραγματικού αριθμού με ακολουθία
- Τετραγωνική ρίζα της ακολουθίας

$\left.\begin{array}{l} \alpha_n = 2 \cdot n \\ b_n = n+1 \end{array}\right\} \oplus \Rightarrow \alpha_n + b_n = 3n+1$

Ασκήσεις

1. Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους της ακολουθίας:

(a) α. $\{1 + (-1)^n\}_{n=0}^{+\infty}$

(b) β. $\{n^2 + 2\}_{n=0}^{+\infty}$

2. Αν $a_0 = 5$, να βρεθεί ο πέμπτος όρος της ακολουθίας: $a_n = a_{n-1} - 1$

1) α)

$\alpha_0 = 1 + (-1)^0 = 2$

$\alpha_1 = 1 + (-1)^1 = 0$

$\alpha_2 = 1 + (-1)^2 = 2$

$\alpha_3 = 1 + (-1)^3 = 0$

b)

$\alpha_0 = 0^2 + 2 = 2$

$\alpha_1 = 1^2 + 2 = 3$

$\alpha_2 = 2^2 + 2 = 6$

$\alpha_3 = 3^2 + 2 = 11$

2)

$\alpha_0 = 5$

$\alpha_1 = \alpha_0 - 1 = 4$

$\alpha_2 = \alpha_1 - 1 = 3$

$\alpha_3 = \alpha_2 - 1 = 2$

$\alpha_4 = \alpha_3 - 1 = 1$

$\alpha_5 = \alpha_4 - 1 = 0$

Αριθμητική Πρόοδος

Αριθμητική Πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Δηλαδή:

$a_{n+1} = a_n + w, n = 1,2,3,\ldots$ $\rightsquigarrow$ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = w$

Ο n-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με **πρώτο όρο** a_1 και **διαφορά** w είναι

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)w}$$

Ιδιότητες

- Μία αριθμητική πρόοδος ορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά της.
- Το άθροισμα των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, με διαφορά w είναι

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)w}{2} n$$

ή

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n}$$

π.χ. 2, 4, 6, 8, ... (Δείτε Ασκ. 1)

$\alpha_1 = 2$

$\alpha_2 = \alpha_1 + 2 = 4$

$\alpha_3 = \alpha_2 + 2 = 6$

$\rightarrow w = 2$ γι. $\alpha_3 - \alpha_2 = 2$, $\alpha_2 - \alpha_1 = 2$

$\vdots$

$\alpha_{50} = \alpha_1 + (50-1)\cdot w = 2 + 49\cdot 2 = 100$

$$S_{50} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{50}}{2}\cdot 50 = \frac{2+100}{2}\cdot 50 = 2550$$

Ασκήσεις

1. Έστω αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο το 2 και διαφορά το 2. Να υπολογίσετε τον πεντηκοστό όρο της, a_{50}. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 50 πρώτων όρων της, S_{50}.
2. Έστω αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο το 3 και διαφορά το 3. Να υπολογίσετε τον τεσσαρακοστό όρο της, a_{40}. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της, S_{40}.

1) $\alpha_1 = 2$, $\omega = 2$, $\alpha_{50} = ?$ κ' $S_{50} = ?$

2) $\alpha_1 = 3$, $\omega = 3$, $\alpha_{40} = ?$ κ' $S_{40} = ?$

$$\alpha_{40} = \alpha_1 + (40-1)\cdot 3 = 120$$

$$S_{40} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{40}}{2} \cdot 40 = 2460$$

Γεωμετρική Πρόοδος

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

Γεωμετρική Πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό. Δηλαδή:

$a_{n+1} = a_n \cdot \lambda, n = 1,2,3, \ldots$

Ο n-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με **πρώτο όρο** a_1 και **λόγο** λ είναι

$\boxed{a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}}$

Σημειώστε ότι σε μια γεωμετρική πρόοδο a_n υποθέτουμε πάντα ότι $a_1 \neq 0$ και $\lambda \neq 0$, οπότε ισχύει ότι $a_n \neq 0, n = 1,2,3, \ldots.$

Ιδιότητες

- Μία γεωμετρική πρόοδος ορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της και το λόγο της.
- Το άθροισμα των πρώτων n όρων γεωμετρικής προόδου, S_n, με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ είναι
  $$S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$
- Το άθροισμα άπειρων όρων μίας γεωμετρικής προόδου, S_∞,με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ, με $|\lambda| < 1$, είναι ίσο με:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - \lambda}$$

(Δητε Ασκ. 1)

Πχ. 2, 4, 8, 16, 32

$a_1 = 2$, $\lambda = 2$ $\quad$ $a_{50} = ?$, $S_{50} = ?$

$$a_{50} = a_1 \cdot \lambda^{50-1} = 2 \cdot 2^{49} = 2^{50}$$

$$S_{50} = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} = 2 \, \frac{2^{50} - 1}{2 - 1} = 2^{51} - 2$$

Ασκήσεις

1. Έστω γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 2 και λόγο το 2. Να υπολογίσετε τον πεντηκοστό όρο της, a_{50}. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 50 πρώτων όρων της, S_{50}.
2. Έστω γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 3 και λόγο το 3. Να υπολογίσετε τον τεσσαρακοστό όρο της, a_{40}. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της, S_{40}.
3. Έστω γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 2 και λόγο το $\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε τον πεντηκοστό όρο της, a_{50}. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 50 πρώτων όρων της, S_{50}, και το άθροισμα άπειρων όρων της, S_∞.
4. Έστω γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 3 και λόγο το $\frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε τον τεσσαρακοστό όρο της, a_{40}. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της, S_{40}, και το άθροισμα άπειρων όρων της, S_∞. 2, H /ω

2) $\alpha_1 = 3$, $q = 3$, $\alpha_{40} = ?$, $S_{40} = ?$

$$\alpha_{40} = \alpha_1 \cdot q^{40-1} = 3 \cdot 3^{39} = 3^{40}$$

$$S_{40} = \alpha_1 \cdot \frac{q^{40}-1}{q-1} = 3\,\frac{3^{40}-1}{2}$$

3) $\alpha_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$, $\alpha_{50} = ?$, $S_{50} = ?$, $S_\infty = ?$

$$\alpha_{50} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50-1} = 2 \cdot \frac{1}{2^{49}} = 2^{-48}$$

$$S_{50} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{50}-1}{\frac{1}{2}-1} = 1 - \frac{1}{2^{50}} \quad > 0$$

$$S_\infty = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

Απλός Τόκος

Απλός Τόκος

Αν τοκίσουμε ένα **κεφάλαιο** K για ένα έτος με **ετήσιο επιτόκιο** i, τότε στο τέλος του έτους θα δημιουργηθεί **τόκος** I ο οποίος θα δίνεται από τη σχέση:

$I = K \cdot i.$

Το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται στο τέλος των n ετών είναι ίσο με το **αρχικό κεφάλαιο** K συν τους τόκους των n ετών, το συμβολίζουμε με K_n και είναι:

$K_n = K + I_n.$

Τύποι:

Χρόνος σε έτη n

Χρόνος σε μήνες μ

Χρόνος σε ημέρες ν

$$I_n = K \cdot n \cdot i \qquad I_\mu = K \cdot \frac{\mu}{12} \cdot i \qquad I_\nu = K \cdot \frac{\nu}{365} \cdot i$$

$$K_n = K + K \cdot n \cdot i \qquad K_\mu = K + \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \qquad K_\nu = K + \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365}$$

Παρατηρήστε ότι στον απλό τόκο το αρχικό κεφάλαιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους τοκισμού.

π.χ. $K_0 = 1000£, \quad i = 10\% = 0,1$

$K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = K_0 + I_1 \rightsquigarrow i \cdot K_0$

$K_2 = K_0 + i \cdot K_0 \cdot 2 = K_0 + I_2 \rightsquigarrow 2 \cdot i \cdot K_0$

$\vdots$

$K_\mu = K_0 + I_\mu \rightsquigarrow \mu \cdot i \cdot K_0$

$K_\mu - K_{\mu-1} = K_0 + I_\mu - (K_0 + I_{\mu-1})$

$= I_\mu - I_{\mu-1}$

$$= I_n - I_{n-1}$$

$$= n \cdot i k_0 - (n-1) i \cdot k_0$$

$$= i k_0 = \omega$$

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega$$

$$k_n = k_1 + (n-1) \cdot k_0 \cdot i$$

$$=$$