Ασκήσεις

Δευτέρα, 9 Δεκεμβρίου 2024 1:56 μμ

3. Να βρεθούν τα 4 πρώτα πολυώνυμα Taylor του $\ln x$ για $x = 2$.

$$f(x) = \ln x \quad , \quad f(2) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \quad , \quad f''(2) = \frac{-1}{4}$$

$$f'''(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-2-1} = 2x^{-3} \quad , \quad f'''(2) = \frac{1}{4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \quad , \quad f^{(4)} = -\frac{6}{16}$$

$$P_0(2) = f(2) = \ln 2$$

$$P_1(2) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) = \ln 2 + \frac{x-2}{2}$$

$$P_2(2) = P_1(2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{8}(x-2)^2$$

$$P_3(2) = P_2(2) + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 = P_2(2) + \frac{(x-2)^3}{4 \cdot 3!}$$

$$P_4(2) = P_3(3) + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 = \ldots$$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 16 Δεκεμβρίου 2024 12:11 μμ

4. Να βρεθεί το n-οστό πολυώνυμο Maclaurin του $\frac{1}{1-x}$ και ύστερα να γραφτεί σε μορφή αθροίσματος.

$\to f(x)$

$\to x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = \left((1-x)^{-1}\right)' = -1 \cdot (1-x)^{-1-1} \cdot (1-x)'$$

$$= -1 \, (1-x)^{-2} \cdot (-1)$$

$$= 1 \cdot (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot (1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1-x)^{-4}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = n! \, (1-x)^{-(n+1)}$$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 1!$

$f''(0) = 2!$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = n!$

$$p_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$x_0 \to 0$

Άρα $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 16 Δεκεμβρίου 2024 12:10 μμ

5. Να βρεθεί το n-οστό πολυώνυμο Taylor του $\frac{1}{x}$ στο $x_0 = 1$ και ύστερα να γραφτεί σε μορφή αθροίσματος.

$\to f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x} = 1 \cdot x^{-1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2} = (-1)^1 \cdot 1! \, x^{-2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3} = (-1)^2 \cdot 2! \cdot x^{-3}$$

$$f'''(x) = -6\frac{1}{x^4} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} = (-1)^3 \, 3! \, x^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 24\frac{1}{x^5} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5} = (-1)^4 \, 4! \, x^{-5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \, x^{-(n+1)}$$

$$f(1) = 1$$
$$f'(1) = -1$$
$$f''(1) = 2!$$
$$f'''(1) = -3!$$
$$f^{(4)}(1) = 4!$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

Άρα
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k)} \cdot k!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot (x-1)^k$$

$$p_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 16 Δεκεμβρίου 2024 12:13 μμ

1. Προσδιορίστε εάν η ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει εξετάζοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$:

(a) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ (b) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

(c) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ (d) $\{8-2n\}_{n=1}^{+\infty}$

α) $\alpha_n = \frac{n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} \rightsquigarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n+1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Άρα η α_n συγκλίνει στο $\frac{1}{2}$.

b) $\alpha_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n+1}$

$$L = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n+1}$$

- όταν n είναι περιττός τότε $L \to +\frac{1}{2}$
- όταν n είναι άρτιος τότε $L \to -\frac{1}{2}$

Άρα η α_n αποκλίνει καθώς

εναλλάσ. στο $\pm \frac{1}{2}$

c) $\alpha_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \rightsquigarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$$

Άρα η α_n συγκλίνει στο 0.

d) $\alpha_n = 8 - 2 \cdot n$

$\lim_{n \to +\infty} 8 - 2n = -\infty$ Άρα η α_n αποκλίνει.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 16 Δεκεμβρίου 2024 1:03 μμ

2. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\left\{\frac{n}{e^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}$$

$\rightsquigarrow$ Έστω ότι έχουμε $f(x) = \frac{x}{e^x}$ όπου $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$$

$$\underset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}$$

$$= 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ e^{+\infty} = +\infty \\ \bullet\ \frac{1}{+\infty} = 0 \end{array}}$$

Άρα ισχύει κ' για την ακολουθία a_n:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

Γενικά θέλει απόδ.
αλλά δεν
θα ζητηθεί.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 16 Δεκεμβρίου 2024 1:34 μμ

3. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} \overset{+\infty^0}{=} \quad \text{Απροσδ.}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} \quad (*)(*)$$

$(*)$ Έστω $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ όπου $x>0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα

$$(*)(*) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 16 Δεκεμβρίου 2024 1:41 μμ

4. Προσδιορίστε εάν η ακολουθία συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

→ ΔΗΤΕ Ασκ. 3.

a) $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ b) $\left\{\frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ c) $\{2\}_{n=1}^{+\infty}$

d) $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ e) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ f) $\{n^2 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

g) $\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ h) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

i) $\left\{(-1)^n \frac{2n^3}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ j) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

k) $\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ l) $\left\{\frac{\pi^n}{4^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

a) $\alpha_n = \left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+2}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

Άρα η α_n συγκλίνει στο 1.

→ παίρνουμε τους μεγιστοβάθμιους

b) $\alpha_n \left\{\frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{n}}{\frac{2n+1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2+\frac{1}{n}} = +\infty$$

$\frac{1}{n} \to 0$

Άρα η α_n αποκλίνει

c) $\alpha_n = \{2\}_{n=1}^{+\infty}$

$\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$ Άρα η α_n συγκλίνει στο 2.

d) $\alpha_n = \left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$

$\ln(0) \to$ απροσδ.

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\cancel{\ln(1)} - \ln(n)\right) = -\infty$$

$\to 0$

Άρα η α_n αποκλίνει.

$$\ln\left(\frac{\alpha}{b}\right) = \ln \alpha - \ln b$$

$$\ln(\alpha \cdot b) = \ln \alpha + \ln b$$

f) $\alpha_n = \{n^2 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 e^{-n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{e^n} \quad \frac{+\infty}{+\infty} \quad (*)$$

Θέτω $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ όπου $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$(*) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$$

g) $\alpha_n = \{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$

- για n περιττό $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$
- για n άρτιο $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 2$

Άρα η α_n αποκλίνει.