Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 11:58 πμ

4. Προσδιορίστε εάν η ακολουθία συγκλίνει και αν ναι βρείτε το όριό της:

a) $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ b) $\left\{\frac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ c) $\{2\}_{n=1}^{+\infty}$

d) $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ e) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ f) $\{n^2 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

g) $\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ h) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

i) $\left\{(-1)^n\frac{2n^3}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ j) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

k) $\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ l) $\left\{\frac{\pi^n}{4^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

h) α_n $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}=0$$

Άρα η α_n συγκλίνει στο 0.

i) $\alpha_n=$ $\left\{(-1)^n\frac{2n^3}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3}{n^3+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^3}\cdot 2}{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=2$$

$\frac{1}{n^3}\to 0$

παίρνουμε τους μεγιστοβάθμιους.

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\boxed{\frac{2n^3}{n^3+1}}=\begin{cases}-2 & \text{για } n \text{ περιττό}\\ 2 & \text{για } n \text{ άρτιο}\end{cases}$$

Άρα α_n αποκλίνει

Αρα α_n απειρ...

j) $\alpha_n = \left\{ \dfrac{n}{2^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} \quad (*) \quad \frac{+\infty}{+\infty}$$

Θέτω $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$ όπου $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} = 0$$

$(*) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$ Άρα η α_n συγκλίνει στο 0.

k) $\alpha_n = \left\{ \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+2}{2n^2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\cdot\left(1+3\cdot\overset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n}}}+2\cdot\overset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n^2}}}\right)}{\cancel{n^2}\cdot 2}$$

παίρνουμε τους μεγιστοβ

$= \dfrac{1}{2}$ Άρα η α_n συγκλίνει στο $\dfrac{1}{2}$.

l) $\alpha_n = \left\{ \dfrac{\pi^n}{4^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^n}{4^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\overset{\to 3.14}{\pi}}{4}\right)^n = 0$$

Άρα η α_n συγκλίνει στο 0.

$+\infty$ $(+\infty \, , \, |x|>1$

$$x^{+\infty} = \begin{cases} +\infty , & |x| > 1 \\ 1 , & |x| = 1 \\ 0 , & |x| < 1 \end{cases}$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 11:58 πμ

5. Το μοντέλο Beverton–Holt χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις αλλαγές σε έναν πληθυσμό από τη μια γενιά στην άλλη κάτω από ορισμένες υποθέσεις. Εάν ο πληθυσμός στη γενιά n δίνεται από το x_n, το μοντέλο Beverton-Holt προβλέπει ότι ο πληθυσμός στην επόμενη γενιά ικανοποιεί

$$x_{n+1} = \frac{RKx_n}{K + (R-1)x_n} = \frac{10 \cdot 300 \cdot x_n}{300 + 9 \cdot x_n}$$

για θετικές σταθερές R και K με $R > 1$.

Έστω $\{x_n\}$ η ακολουθία τιμών πληθυσμού που ορίζεται αναδρομικά από $x_1 = 60$, και για $n \geq 1$, το x_{n+1} δίνεται από το μοντέλο Beverton–Holt με $R = 10$ και $K = 300$.

(a) Αν $0 < x_n < 300$, να δείξετε ότι $0 < x_n + 1 < 300$. Καταλήξτε ότι $0 < x_n < 300$ για $n \geq 1$.
(b) Δείξτε ότι η $\{x_n\}$ είναι αύξουσα.
(c) Δείξτε ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει και βρείτε το όριό της L.

α) Αν $0 < x_n < 300$ τότε:

- Όταν $x_n > 0$

$$x_{n+1} = \frac{10 \cdot 300 \cdot x_n}{300 + 9 \cdot x_n} > \frac{10 \cdot 300 \cdot 0}{300 + 9 \cdot 0} = 0$$

↳ δεν υπάρχει αρνητικός αριθμός.

- Όταν $x_n < 300$

$$x_{n+1} = \frac{10 \cdot 30 \cdot x_n}{300 + 9 \cdot x_n} < \frac{10 \cdot 300 \cdot 300}{300 + 9 \cdot 300} = 300$$

Άρα $0 < x_{n+1} < 300$ για $n \geq 1$.
Επίσης, x_n είναι φραγμένη. $(0 < x_n < 300)$

b) Μονοτονία.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \rightsquigarrow \text{Έστω } x_n \text{ αύξουσα.}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{RKx_n}{K+(R-1)x_n}}{x_n} = \frac{R \cdot K \cdot \cancel{x_n}}{(K+(R-1) \cdot x_n)\cancel{x_n}} =$$

$$= \frac{R \cdot K}{K+(R-1)x_n} = \frac{10 \cdot 300}{300 + 9 \cdot x_n} > \frac{10 \cdot 300}{300+9 \cdot 300} = 1$$

Ισχύει γτ. $x_n < 300$

Οπότε x_n είναι αύξουσα.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$

Η x_n είναι αύξουσα κ' άνω φραγμένη ($x_n < 300$)

από θεωρία η x_n είναι συγκλίνουσα.

Έστω $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{R \cdot K}{K+(R-1)x_n} = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

$$\Rightarrow \frac{RKL}{K+(R-1)L} = L$$

$$\Rightarrow RKL = L\,(K+(R-1) \cdot L)$$

$$\Rightarrow L(K+(R-1)L) - RKL = 0$$

$$\Rightarrow \quad LK + L^2(R-1) - RKL = 0$$

$$\Rightarrow \quad L^2(R-1) + L\cdot(K - RK) = 0$$

$$\Rightarrow \quad L\cdot\big((R-1)\cdot L + K - RK\big) = 0$$

$L = 0$ $\rightsquigarrow$ απορ. γτ. x_4 αυξάνονται κ' $x_1 = 60$

ή

$(R-1)\cdot L + K - RK = 0 \Rightarrow L = \dfrac{R\cdot K - K}{R-1} = K = 300$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 11:58 πμ

6. Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$ με $x \neq 0$.

(a) Να δείξετε ότι $a_{n+1} = \frac{|x|}{n+1} a_n$

(b) Δείξτε ότι η ακολουθία a_n είναι τελικά αυστηρά φθίνουσα.

(c) Δείξτε ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει.

$$\text{a)} \quad \alpha_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\overbrace{\tfrac{|x|^n}{n!}}^{\alpha_n} \cdot |x|}{(n+1)} = \frac{|x|}{n+1} \cdot \alpha_n$$

$$\text{b)} \quad \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{|x|}{n+1} \cdot \cancel{\alpha_n}}{\cancel{\alpha_n}} = \frac{|x|}{n+1} < 1$$

Θα πρέπει να ισχύει για να είναι η α_n φθίνουσα.

Αυτό ισχύει όταν.

$$|x| < n+1 \Rightarrow n > |x| - 1$$

Άρα η ακολουθία είναι τελικά φθίνουσα για $n > |x| - 1$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 11:58 πμ

1. Βρείτε όλες τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά και βρείτε το άθροισμα της σειράς για αυτές τις τιμές του x.

a) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \cdots$

b) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{8}{x^5} + \dfrac{16}{x^6} + \cdots$

c) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \cdots$

Γεωμ. σειρά. $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \cdot q^n = \alpha \cdot q^0 + \alpha \cdot q^1 + \alpha \cdot q^2 + \ldots$

α) $x \cdot (-x^2)^0 + x \cdot (-x^2)^1 + x \cdot (-x^2)^2 + \ldots$

όπου $\alpha = x$, $q = -x^2$

Η σειρά συγκλίνει για $|q| < 1 \Rightarrow |-x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$

$\Rightarrow S = \dfrac{\alpha}{1-q} = \dfrac{x}{1-(-x)^2} = \dfrac{x}{1+x^2}$

b) $\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{x}\right)^0 + \dfrac{1}{x^2} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^1 + \dfrac{1}{x^2} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 + \ldots$

Άρα Γεωμ. σειρά με $\alpha = \dfrac{1}{x^2}$, $q = \dfrac{2}{x}$

Η σειρά συγκλίνει για $|q| = \left|\dfrac{2}{x}\right| < 1 \Rightarrow |x| > 2$

$S = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$

c) $e^{-x}(e^{-x})^0 + e^{-x}(e^{-x})^1 + e^{-x}(e^{-x})^2 + \dots$

Άρα γεωμ. σειρά με $\alpha = e^{-x}$, $q = e^{-x}$

Η σειρά συγκλίνει $|e^{-x}| < 1$

$\Rightarrow e^{-x} < 1$

$\Rightarrow e^{x} > 1$

$\Rightarrow \ln e^{x} > \ln 1$

$\Rightarrow x \ln e > 0$

$\Rightarrow x > 0$

$$S = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^{x} + 1}$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 12:01 μμ

2. Να δείξετε ότι:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots = \frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2}$

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\underbrace{\sqrt{k^2+k}}_{\sqrt{k(k+1)}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{\sqrt{k+1}}}{\cancel{\sqrt{k+1}}\sqrt{k}} - \frac{\cancel{\sqrt{k}}}{\sqrt{k+1}\cdot\cancel{\sqrt{k}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \rightsquigarrow \text{Τηλεσκοπ. σειρά.}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$S_n = \left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{6}\right)$$

$$+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{7}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$$

c) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$

$$\frac{0\cdot k+1}{k(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+2}=\frac{A(k+2)+Bk}{k\cdot(k+2)}$$

$$=\frac{(A+B)k+2A}{k\cdot(k+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{k} + \frac{-\frac{1}{2}}{k+2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Δήτε b) για θόση

d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$\frac{0 \cdot k + 1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$$

$$= \frac{A(2k+1) + B(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{(A+B)2k + A - B}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A+B)2 = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sum^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{2k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2k+1}$$

$$\sum_{k=1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1} \frac{\frac{1}{2}}{2k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)-1} \right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 12:01 μμ

3. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου για να προσδιορίσετε εάν η σειρές συγκλίνουν:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!10^k}{3^k}$ e) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{50}e^{-k}$ f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{e^k}$ i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Μια σειρά συγκλίνει όταν

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu} = \rho < 1$$

a) $\alpha_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$

$$\frac{\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu} = \frac{\frac{7^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{7^k}{k!}} = \frac{7^{k+1} \cdot k!}{7^k \cdot (k+1)!} = \frac{7^k \cdot 7 \cdot k!}{7^k \cdot k! (k+1)} = \frac{7}{k+1}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{7}{k+1} = 0 .$$ Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

b) $\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$

$$\frac{\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu} = \frac{\frac{1}{2(\mu+1)+1}}{\frac{1}{2\mu+1}} = \frac{2\mu+1}{2(\mu+1)+1} = \frac{2\mu+1}{2\mu+3} =$$

$$= \frac{2\mu+1+2-2}{2\mu+3} = \frac{2\mu+3}{2\mu+3} - \frac{2}{\mu+3}$$

$$= 1 - \frac{2}{\mu+3}$$

$$\lim_{\mu \to +\infty} 1 - \frac{2}{\mu+3} = 1$$

Άρα δεν ξέρουμε αν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

c) $\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5^k}$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{(k+1)^2}{5^{k+1}}}{\frac{k^2}{5^k}} = \frac{(k+1)^2 \cdot 5^k}{5^{k+1} \cdot k^2} = \frac{(k+1)^2 \cdot 5^k}{5^k \cdot 5 \cdot k^2}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{5} < 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 12:01 μμ

$$p_v(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!}(x-x_0)^v$$

1. Να βρεθεί το τρίτου βαθμού πολυώνυμο Maclaurin της $x_0 = 0$

$$f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$$

$f(0) = 1$

$f'(x) = 2 - 2x + 3x^2$

$f'(0) = 2$

$f''(x) = -2 + 6x$

$f''(0) = -2$

$f'''(x) = 6$

$f'''(0) = 6$

$$P_3 = 1 + \frac{2}{1!} \cdot x + \frac{-2}{2!} x^2 + \frac{6}{3!} x^3 = 1 + 2x - x^2 + x^3 = f(x)$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 12:01 μμ

2. Να βρεθεί το τρίτου βαθμού πολυώνυμο Taylor στο $x = 1$ της

$$f(x) = 1 + 2(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3$$

$f(1) = 1$

$f'(x) = 2 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$

$f'(1) = 2$

$f''(x) = -2 + 6(x-1)$

$f''(1) = -2$

$f'''(x) = 6$

$f'''(1) = 6$

$$P_3 = 1 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1) + \frac{6}{3!}(x-1)^3 = f(x)$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 12:02 μμ

$\rightsquigarrow x_0 = 0$

3. Να βρεθεί το n-οστό πολυώνυμο Maclaurin της

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 \cdot x + \ldots + n \cdot c_n \cdot x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot x + \ldots + (n-1) \cdot n\, c_n \cdot x^{n-2}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot c_n = n!\, c_n$$

$f(0) = c_0$

$f'(0) = c_1 = c_1 \cdot 1!$

$f''(0) = c_2 \cdot 1 \cdot 2 = c_2 \cdot 2!$

$f^{(n)} = c_n \cdot n!$

$$P_n = c_0 + \frac{1! \cdot c_1}{1!} \cdot x + \frac{2!\, c_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{n!\, c_n}{n!} x^n$$

$$= c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \ldots + c_n \cdot x^n = f(x)$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Δευτέρα, 23 Δεκεμβρίου 2024 12:02 μμ

4. Να βρεθεί το n-οστό πολυώνυμο Taylor στο $x = 1$ της

$$f(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \cdots + c_n(x-1)^n$$ $= P_n$ της Άσκησης 4

$$f'(x) = \ldots\ldots + n\, c_n \cdot (x-1)^{n-1}$$

$$f''(x) = \ldots\ldots + (n-1)\cdot n\, c_n \cdot (x-1)^{n-2}$$

$$f'''(x) = \ldots + (n-2)(n-1)\, n\, c_n \cdot (x-1)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n-1)}(x) = \ldots\ldots + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\cdot(n-2)(n-1)\, n\, c_n \cdot (x-1)^1$$

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\ldots (n-2)(n-1)\, n}_{n!} \cdot c_n = n!\, c_n$$

όπως στην Ασκ. 4, θα καταλήξουμε

ότι $P_n = f(x)$