Απλός Τόκος

Απλός Τόκος

Αν τοκίσουμε ένα **κεφάλαιο** K για ένα έτος με **ετήσιο επιτόκιο** i, τότε στο τέλος του έτους θα δημιουργηθεί **τόκος** I ο οποίος θα δίνεται από τη σχέση:

$I = K \cdot i.$

Το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται στο τέλος των n ετών είναι ίσο με το **αρχικό κεφάλαιο** K συν τους τόκους των n ετών, το συμβολίζουμε με K_n και είναι:

$K_n = K + I_n.$

Τύποι:

Χρόνος σε έτη n

Χρόνος σε μήνες μ

Χρόνος σε ημέρες ν

$$I_n = K \cdot n \cdot i \qquad I_\mu = K \cdot \frac{\mu}{12} \cdot i \qquad I_\nu = K \cdot \frac{\nu}{365} \cdot i$$

$$K_n = K + K \cdot n \cdot i \qquad K_\mu = K + \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \qquad K_\nu = K + \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365}$$

Παρατηρήστε ότι στον απλό τόκο το αρχικό κεφάλαιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους τοκισμού.

π.χ. $K_0 = 1000£, \quad i = 10\% = 0,1$

$K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = K_0 + I_1 \rightsquigarrow i \cdot K_0$

$K_2 = K_0 + i \cdot K_0 \cdot 2 = K_0 + I_2 \rightsquigarrow 2 \cdot i \cdot K_0$

$\vdots$

$K_n = K_0 + I_n \rightsquigarrow n \cdot i \cdot K_0$

$K_n - K_{n-1} = K_0 + I_n - (K_0 + I_{n-1})$

$= I_n - I_{n-1}$

$$= I_n - I_{n-1}$$

$$= n \cdot i k_0 - (n-1)\, i \cdot k_0$$

$$= i k_0 = \omega$$

Αριθμητική πρόοδος

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot \omega$$

$$k_n = k_1 + (n-1)\cdot k_0 \cdot i$$

$$= k_0 + k_0 \cdot i + (n-1)\, k_0 \cdot i$$

$$= k_0 + (n-1+1)\cdot k_0 \cdot i$$

$$= k_0 + n \cdot k_0 \cdot i$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου €3.000 το οποίο τοκίζεται:
   a. με ετήσιο επιτόκιο 7% για 5 έτη,
   b. επιτόκιο 4% για 8 μήνες,
   c. με ετήσιο επιτόκιο 9% για 80 ημέρες.
2. Έστω κεφάλαιο €10.000 το οποίο τοκίστηκε από την $1_{η}$ Ιανουαρίου έως τις $26^{η}$ Μαρτίου με ετήσιο επιτόκιο 9%. Να βρεθεί το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται στην περίπτωση όπου έχουμε:
   a. **Πολιτικό έτος** (όχι δίσεκτο). Δηλαδή ο Ιανουάριος έχει 31 ημέρες, ο Φεβρουάριος 28, ο Μάρτιος 31 και το έτος αποτελείται από 365 ημέρες.
   b. **Εμπορικό έτος**. Δηλαδή όλοι οι μήνες έχουν 30 ημέρες και το έτος αποτελείται από 360 ημέρες.

1) α) $K_0 = 3000$ €, $i = 7\%$ ή $0{,}07$, $n = 5$

$$K_5 = K_0 + 5 \cdot K_0 \cdot 0.07 = 3000 + 5 \cdot 3000 \cdot 0.07$$

$$= 4050$$

$$I_5 = 5 \cdot K_0 \cdot 0.07 = 1050$$

b) $K_8 = K_0 + K_0 \cdot \frac{8}{12} \cdot 0.04$

$$= 3000 + 3000 \cdot \frac{8}{12} \cdot 0.04 = 3080$$

$$I_8 = 3000 \cdot \frac{8}{12} \cdot 0.04 = 80$$

c) $K_{80} = K_0 + K_0 \cdot \frac{80}{365} \cdot 0.09 = 3059{,}17\ldots$

$$I_{80} = 3000 \cdot \frac{80}{365} \cdot 0.09 = 59{,}17\ldots$$

2) $K_0 = 10000$, $i = 0.09$

α) $\nu = 31 + 28 + 26 = 85$

$$K_{85} = 10000 + 10000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{85}{365}$$

$$= 10209.59$$

β) $\nu = 30 + 30 + 26 = 86$

$$K_{86} = 10000 + 10000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{86}{360}$$

$$= 10215$$

Ανατοκισμός

Ανατοκισμός

Στον ανατοκισμό, στο τέλος κάθε περιόδου, ο τόκος και το κεφάλαιο αθροίζονται και το άθροισμα αυτό τοκίζεται σαν νέο αρχικό κεφάλαιο.

Τα κεφάλαια που προκύπτουν κατά τη διαδικασία του ανατοκισμού στο τέλος κάθε περιόδου, αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης και λόγο τον όρο $1 + i$.

Ο γενικός τύπος του ανατοκισμού είναι ο ακόλουθος:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Όπου K_0 συμβολίζει το αρχικό κεφάλαιο. Σημειώστε ότι για να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο θα πρέπει το επιτόκιο να είναι σταθερό για όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού.

$K_0 = 1000$, $i = 10\%$ ή $0,1$

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = 1000 + 1000 \cdot 0,1 = 1100$$

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_0 + K_0 \cdot i + (K_0 + K_0 \cdot i)\, i$$

$$= (K_0 + K_0 \cdot i)(1+i) = 1100 \cdot 1.1 = 1210$$

$$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = (K_0 + K_0 \cdot i)(1+i) + (K_0 + K_0 \cdot i)(1+i) \cdot i$$

$$= (K_0 + K_0 \cdot i)(1+i)(1+i)$$

$$= (K_0 + K_0 \cdot i)(1+i)^2 = K_0 (1+i)(1+i)^2$$

$$= K_0 (1+i)^3$$

$\vdots$

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = \ldots = K_0 (1+i)^n$$

$$\frac{K_\mu}{K_{\mu-1}} = \frac{\cancel{K_0}(1+i)^\mu}{\cancel{K_0}(1+i)^{\mu-1}} = (1+i)^{\mu-(\mu-1)} = 1+i = q$$

Γεωμ. πρόοδος

$$\alpha_\mu = \alpha_1 \cdot q^{\mu-1}$$

$$K_\mu = K_1 \cdot (1+i)^{\mu-1}$$

$$= (K_0 + K_0 \cdot i)(1+i)^{\mu-1} = K_0(1+i)(1+i)^{\mu-1}$$

$$= K_0(1+i)^\mu$$

Ασκήσεις

1. Κεφάλαιο €3.000 τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 12% για 35 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος της κατάθεσης αν ο τοκισμός έγινε
    a. Με απλό τόκο
    b. Με ετήσιο ανατοκισμό.
2. Κεφάλαιο €10.000 τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 15% για 30 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος της κατάθεσης αν ο τοκισμός έγινε
    a. Με απλό τόκο
    b. Με ετήσιο ανατοκισμό.

1) α) $K_0 = 3000$, $i = 0,12$, $n = 35$

α) $K_{35} = 3000 + 3000 \cdot 0.12 \cdot 35 = 15600$

b) $K_{35} = 3000(1+0.12)^{35} = 158398,85\ldots$

$K_0 = 100000$, $i = 4\%$ ή $0,04$, $n=10$

α) $K_{10} = 100000 + 100000 \cdot 0.04 \cdot 10 = 140000$

b) $K_{10} = 100000(1+0.04)^{10} = 148024$

Ακολουθίες (συνέχεια)

Ακολουθίες (συνέχεια)

Συγκλίνουσες ακολουθίες

→ μικρή τιμή

Μία ακολουθία a_n **συγκλίνει** στο $L \in \mathbb{R}$ ή **έχει όριο** το $L \in \mathbb{R}$,αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $N(\varepsilon)$, ώστε για κάθε$n \geq N$ να ισχύει:

$|a_n - L| < \varepsilon$

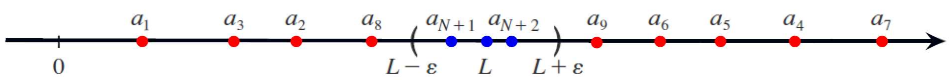
$|a_n - L| < \varepsilon$

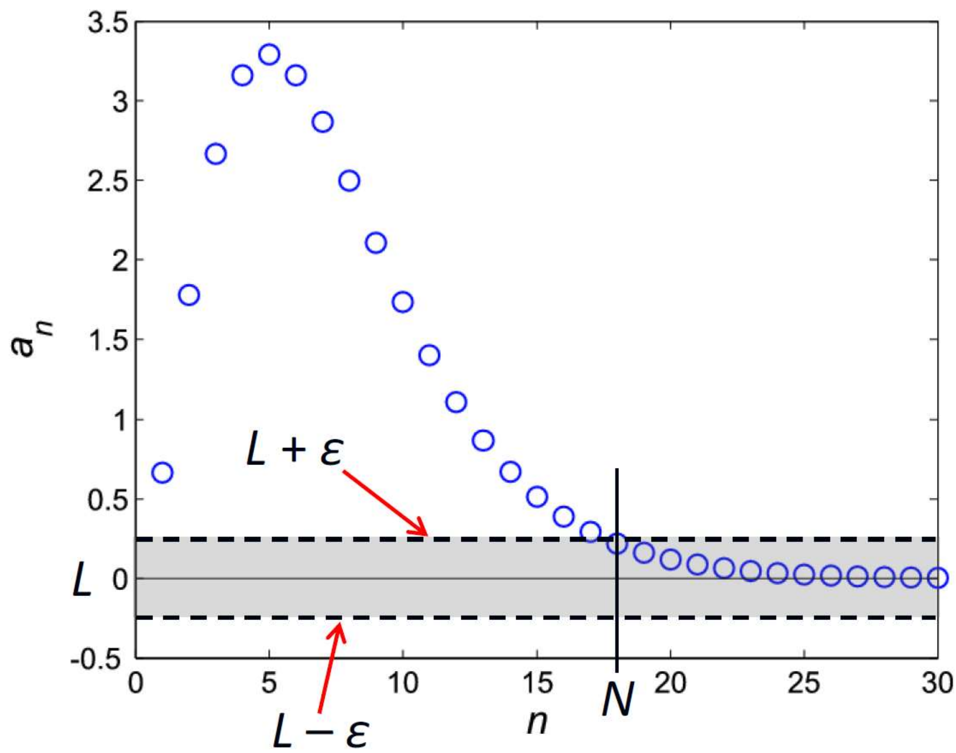
$\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$

$\Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

δηλαδή $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, και συμβολίζουμε

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ ή $a_n \to L$





- Μία ακολουθία που συγκλίνει στο $L \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **συγκλίνουσα**.
- Η ακολουθία λέγεται **μηδενική** αν $L = 0$. Δηλαδή

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

- Αν μια ακολουθία συγκλίνει, το όριό της είναι μοναδικό.

$a_n = \frac{5n+2}{3n} \Rightarrow \lim a_n = \frac{5}{3}$

Παράδειγμα

Παράδειγμα

$\alpha_n = \frac{5n+2}{3n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \frac{5}{3}$

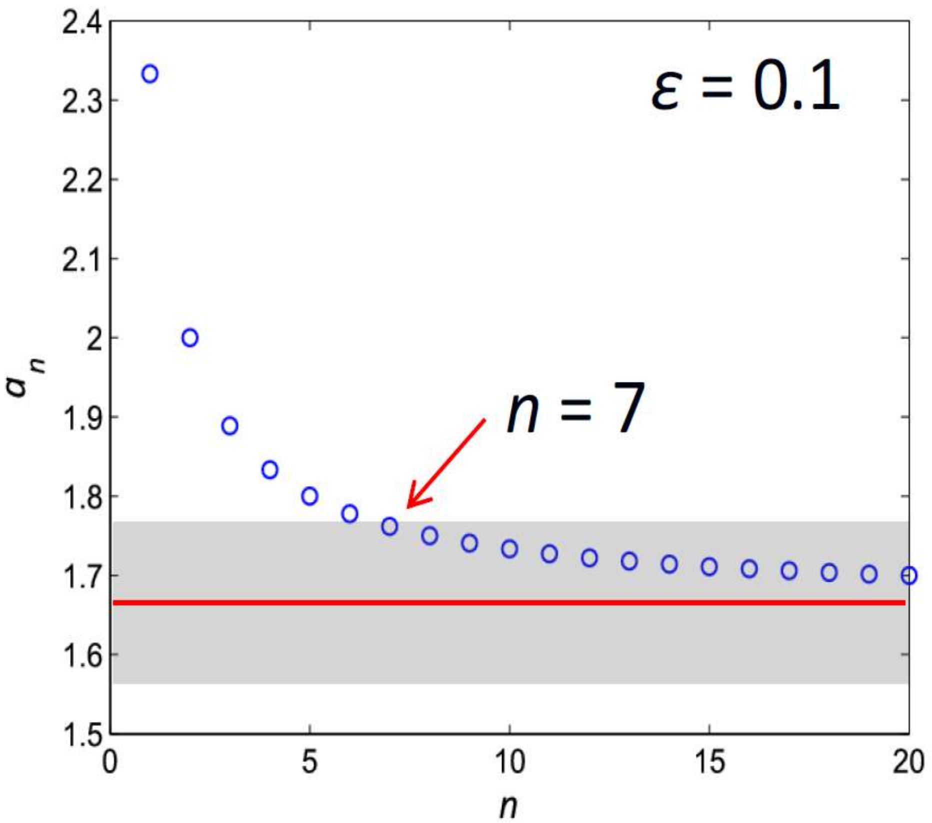
Να δειχθεί μέσω του ορισμού ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+2}{3n} = \frac{5}{3}$

$L = \frac{5}{3}$

$$\left|\frac{5n+2}{3n} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5n+2-5n}{3n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{3n} < \varepsilon$$

Επιλέγοντας $n > \frac{2}{3\varepsilon}$

τότε $\left|\frac{5n+2}{3n} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$



Ιδιότητες

Έστω δύο συγκλίνουσες ακολουθίες a_n, b_n, με αντίστοιχα όρια A, B. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = A$ κ' $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$

Έστω δύο **συγκλίνουσες** ακολουθίες (a_n), (b_n), με αντίστοιχα όρια A

Έστω δύο **συγκλίνουσες** ακολουθίες (a_n), (b_n), με αντίστοιχα όρια A, B. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{A}{B}$ $\longrightarrow$ όταν $B \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot A$ $c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(c) = c$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^p) = A^p$ $\longrightarrow$ όταν $p > 0$ και $a_n > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_n|) = |A|$

  * Το αντίστροφο δεν ισχύει, εκτός αν $A = 0$:

  $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |A| \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

  $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

- Αν $a_n \leq b_n$ για $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, τότε $A \leq B$.
- Αν $M \leq a_n \leq N$ για $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, τότε $M \leq A \leq N$.

<u>**Χαρακτηριστικές περιπτώσεις**</u>

- Αν $a_n = \dfrac{1}{n}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $= \dfrac{1}{\infty} = 0$
- Αν $a_n = a^n$, τότε (α^n) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \text{ αν } -1 < a < 1 & |\alpha| < 1 \\ 1, \text{ αν } a = 1 & \\ +\infty, \text{ αν } a > 1 & |\alpha| > 1 \end{cases}$
- Αν $a_n = \sqrt[n]{a}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ $\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = \alpha^0 = 1$
- Αν $a_n = \sqrt[n]{n}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- Αν $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e = 2{,}7182818\ldots$

<u>**Κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (κριτήριο παρεμβολής)**</u>

Έστω τρεις ακολουθίες a_n, b_n, c_n, για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L$$

Αν για $n > n_0$ ισχύει $a_n \leq b_n \leq c_n$, τότε