$\lim\limits_{n\to\infty}(\ldots)$ ... όταν $p>0$ και $a_n>0$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|a_n\right|\right)=\left|A\right|$

  * Το αντίστροφο δεν ισχύει, εκτός αν $A=0$:

  $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|A\right| \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

  $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

- Αν $a_n\le b_n$ για $n\ge n_0\in\mathbb{N}$ , τότε $A\le B$.
- Αν $M\le a_n\le N$ για $n\ge n_0\in\mathbb{N}$ , τότε $M\le A\le N$.

<u>**Χαρακτηριστικές περιπτώσεις**</u>

$= \frac{1}{\infty} = 0$

- Αν $a_n=\frac{1}{n}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$
- Αν $a_n=a^n$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, \text{ αν } -1<a<1 & |\alpha|<1\\ 1, \text{ αν } a=1 \\ +\infty, \text{ αν } a>1 & |\alpha|>1\end{cases}$
- Αν $a_n=\sqrt[n]{a}$ , τότε $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{\frac{1}{n}}=\alpha^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\alpha^0=1$
- Αν $a_n=\sqrt[n]{n}$ , τότε $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$
- Αν $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e=2{,}7182818\ldots$

$\boxed{x=e^{\ln x}}$

$\Rightarrow \ln x=\ln e^{\ln x}$

$\Rightarrow \ln x=\ln x \cancel{\ln e}$

$\Rightarrow x=x$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=\mathrm{I}$

θέτω $u=\ln n$

$\Rightarrow \ln e^u=\ln n$

$\Rightarrow e^u=n$

$\mathrm{I} \Rightarrow \lim\limits_{u\to\infty}e^{\frac{u}{e^u}}=e^{\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u}{e^u}}\overset{DLH}{=}e^{\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{e^u}}=e^0=1$

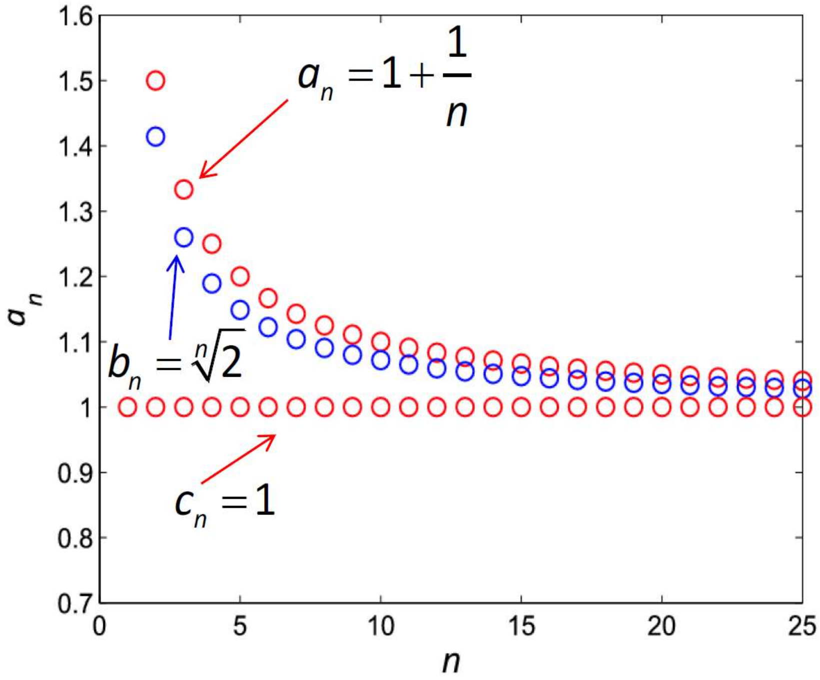
<u>**Κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (κριτήριο παρεμβολής)**</u>

Έστω τρεις ακολουθίες $a_n, b_n, c_n$, για τις οποίες ισχύει:

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=L$

Αν για $n > n_0$ ισχύει $a_n \leq b_n \leq c_n$, τότε

$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$




**Παράδειγμα**

$\sin n \in [-1, 1]$

Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Είναι γνωστό ότι $-1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{\sin n}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}$

Εφόσον $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$a_n \leq b_n \leq c_n$

Θα ισχύει και $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

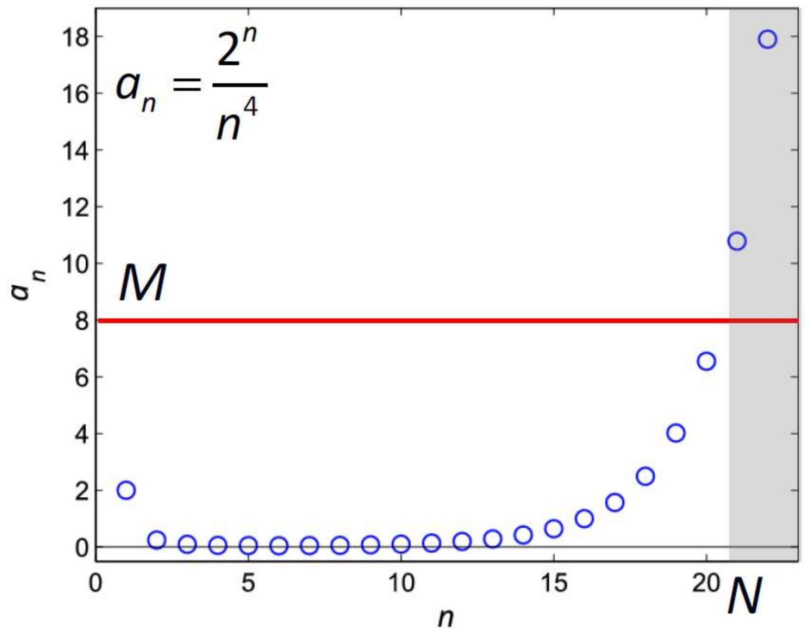
**Ακολουθίες στο άπειρο**

Μία ακολουθία **συγκλίνει στο** $+\infty$ ή **έχει όριο το** $+\infty$ ή **απειρίζεται θετικά**, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $a_n > M$ για κάθε $n > N$. Τότε

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad$ ή $\quad a_n \to +\infty$

Αντίστοιχα, μία ακολουθία **συγκλίνει στο** $-\infty$ ή **έχει όριο το** $-\infty$ ή **απειρίζεται αρνητικά**, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $a_n < -M$ για κάθε $n > N$. Τότε

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad$ ή $\quad a_n \to -\infty$




**<u>Πράξεις με ακολουθίες που απειρίζονται</u>**

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \mp\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$

**<u>Φραγμένες ακολουθίες</u>**

- Η ακολουθία $a_n$ είναι **άνωφραγμένη** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $M$ ώστε

  $a_n \le M, n = 1,2,3,\ldots$

  Σε αυτή την περίπτωση ο $M$ είναι ένα **άνω φράγμα** της ακολουθίας.
- Ηακολουθία $a_n$ είναι **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $m$ ώστε

  $a_n \ge m, n = 1,2,3,\ldots$

  Σε αυτή την περίπτωση ο $m$ είναι ένα **κάτω φράγμα** της ακολουθίας.
- Ηακολουθία $a_n$ είναι **φραγμένη** αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $m, M$ ώστε

  $m \le a_n \le M, n = 1,2,3,\ldots$

**<u>Παράδειγμα</u>**

Έστω ακολουθία $a_n = \frac{3n-5}{5n+8}$.

$\alpha_n = \frac{3n-5}{3n+8} = \frac{3n}{3n+8} - \overset{>0}{\boxed{\frac{5}{3n+8}}} < \frac{3n}{3n+8}$

**Παράδειγμα**

Έστω ακολουθία $a_n = \frac{3n-5}{5n+8}$.

Τότε $a_n = \frac{3n-5}{5n+8} < \frac{3n}{5n+8} < \frac{3n}{5n} = \frac{3}{5}$

Και $a_n = \frac{3n-5}{5n+8} \geq \frac{-2}{5n+8} \geq \frac{-2}{13}$

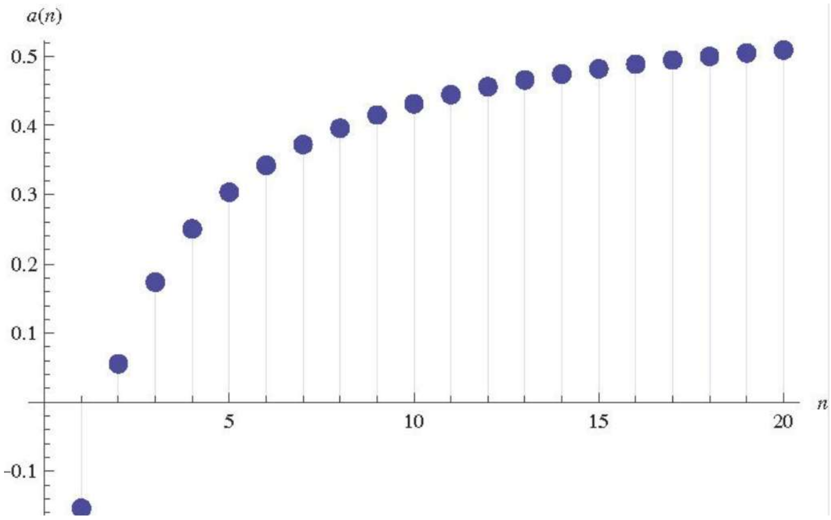
Άρα η συγκεκριμένη ακολουθία είναι φραγμένη.

• $\alpha_n = \frac{\dots}{3n+8} = \frac{\dots}{3n+8}$ • $\boxed{\frac{\dots}{3n+8}} < \frac{\dots}{3n+8}$

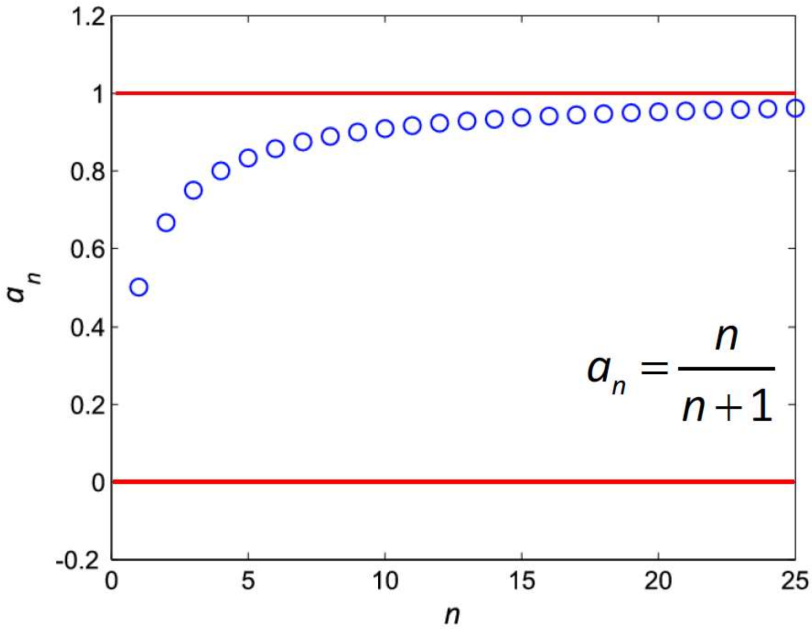
Για $n=1$
$5 \cdot n + 8 = 13$
$3n - 5 = -2$

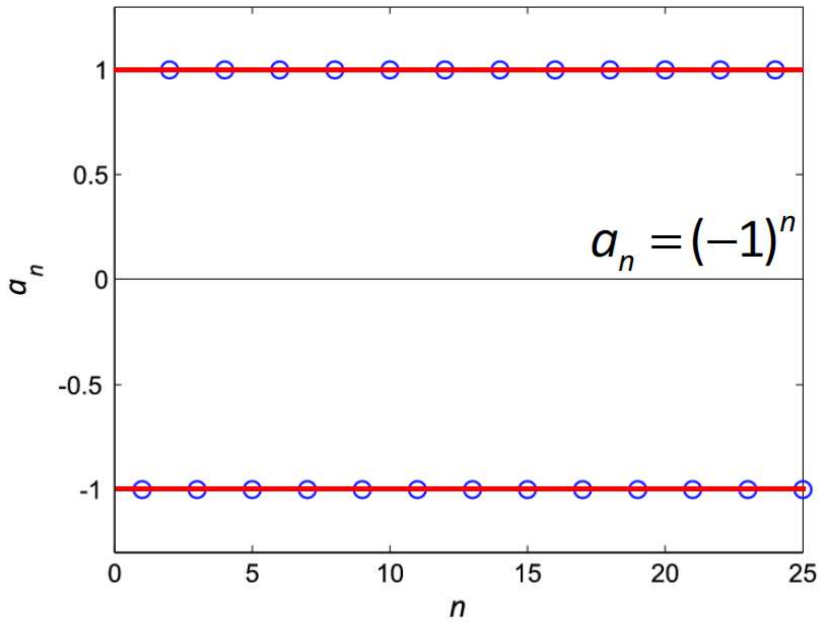
• $\frac{3n}{5n+8} < \frac{3n}{5n}$

• $5n + 8 > 5n$
$\Rightarrow \frac{1}{5n+8} < \frac{1}{5n}$

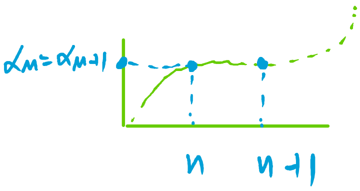


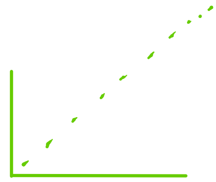

- Μια οποιαδήποτε **συγκλίνουσα** ακολουθία είναι **φραγμένη**. Το αντίστροφο δεν ισχύει.






**Μονοτονία ακολουθιών**



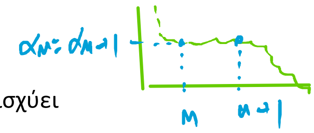
- Η ακολουθία $a_n$ λέγεται **αύξουσα** αν ισχύει

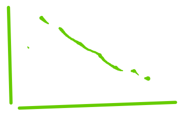
  $a_n \leq a_{n+1}$, n = 1,2,3, …
- Η ακολουθία $a_n$ λέγεται **γνησίως αύξουσα** αν ισχύει

  $a_n < a_{n+1}$, n = 1,2,3, …
- Η ακολουθία $a_n$ λέγεται **φθίνουσα** αν ισχύει

  $a_n \geq a_{n+1}$, n = 1,2,3, …
- Η ακολουθία $a_n$ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** αν ισχύει

  $a_n > a_{n+1}$, n = 1,2,3, …



**Παράδειγμα**

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = \frac{3n-5}{5n+8}$ είναι γνησίως μονότονη.

$a_{n+1} > a_n$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(n+1)-5}{5(n+1)+8} > \dfrac{3n-5}{5n+8}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3n-2}{5n+13} > \dfrac{3n-5}{5n+8}$

$\Leftrightarrow 15n^2 + 14n - 16 > 15n^2 + 14n - 65$

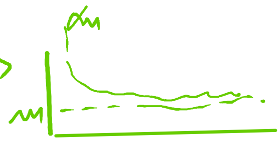
$\Leftrightarrow 49 > 0$

που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

**Ιδιότητες**

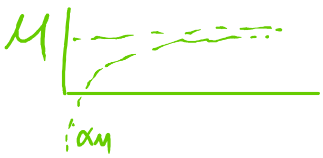
- Κάθε **μονότονη** και **φραγμένη** ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
- Αν $m$ είναι ένα **κάτω φράγμα** μιας **φθίνουσας** ακολουθίας $a_n$, τότε

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq m$




- Αν $M$ είναι ένα **άνω φράγμα** μιας **αύξουσας** ακολουθίας $a_n$, τότε

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq M$




- Μια **μονότονη** και **μη φραγμένη** ακολουθία συγκλίνει:
  - στο $+\infty$, αν είναι **αύξουσα**,
  - στο $-\infty$, αν είναι **φθίνουσα**.

- στο $-\infty$, αν είναι **φθίνουσα**.

**Παράδειγμα**

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ είναι γνησίως μονότονη.

$a_{n+1} < a_n$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} < \dfrac{n}{n^2+1}$

$\Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) < n((n+1)^2+1)$

$\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 1 > 0$

που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Επίσης, η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη: $a_n > 0$

Άρα η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

**Η ιδιότητα ''τελικά''**

Εάν η απόρριψη πεπερασμένων πολλών όρων από την αρχή μιας ακολουθίας παράγει μια ακολουθία με μια συγκεκριμένη ιδιότητα, τότε η αρχική ακολουθία λέγεται ότι έχει αυτή την ιδιότητα τελικά. Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n$ λέγεται **τελικά** άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη, αύξουσα, κλπ. αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε οι αντίστοιχες σχέσεις να ισχύουν για $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$

**Παράδειγμα**

Η ακολουθία $9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \ldots$

είναι γνησίως αύξουσα από τον πέμπτο όρο και μετά, αλλά η ακολουθία στο σύνολό της δεν μπορεί να ταξινομηθεί ως γνησίως αύξουσα λόγω της ασταθούς συμπεριφοράς των πρώτων τεσσάρων όρων. Για αυτόν το λόγο λέγεται τελικά γνησίως αύξουσα.

**Παραγοντικό ενός φυσικού αριθμού**

Υπενθυμίζεται ότι το **παραγοντικό ενός φυσικού αριθμού** $v$ συμβολίζεται με $v!$, διαβάζεται $v$ παραγοντικό, και είναι το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων μικρότερων ή ίσων με $v$:

$v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot v$

Επιπλέον ορίζουμε, $0! = 1$.

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

# Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ για να δείξετε ότι η ακολουθία
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$
είναι γνησίως αύξουσα. $\rightsquigarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+1) > n(n+2)$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 - n(n+2) > 0$$

$$\Rightarrow n^2+2n+1 - n^2 - 2n > 0$$

$$\Rightarrow 1 > 0 \quad \text{ισχύει για } n = 1, 2, 3, \dots$$

Άρα $\alpha_n$ είναι γν. αύξουσα.

2. Χρησιμοποιήστε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για να δείξετε ότι η ακολουθία
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \boxed{\frac{n}{n+1}}, \dots$ $\alpha_n$
είναι γνησίως αύξουσα.

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left(\frac{\frac{(n+1)}{(n+1)+1}}{\frac{n}{n+1}}\right) = \frac{(n+1)(n+1)}{n \cdot ((n+1)+1)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n} + \frac{1}{n^2+2n}$$

$$1 + \boxed{\frac{1}{\ }} > 0 \quad > 1$$

$$= 1 + \boxed{\frac{1}{n^2+2n}} > 0 \quad > 1$$

Άρα $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$

Οπότε $a_n$ γν. αύξουσα

3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι τελικά γνησίως φθίνουσα.

$$a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 10^n} < 1$$

$$(n+1)! = \underline{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} \cdot (n+1) = n!(n+1)$$

$$n! = \underline{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}$$

$$\Rightarrow \frac{10^n \cdot 10 \cdot n!}{n!(n+1) \cdot 10^n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10}{n+1} < 1 \quad ?$$

θέλουμε ισχύει

$$\frac{10}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 10 < n+1 \Leftrightarrow n > 9$$

Άρα για $n > 9$ η $a_n$ είναι τελικά

Αρα για $n>9$ η $a_n$ είναι τελικά γν. φθίνουσα.

4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει και να βρείτε το όριό της.
5. Χρησιμοποιήστε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

**a)** $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **b)** $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **c)** $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**d)** $\left\{\frac{n}{4n-1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **e)** $\{n-2^n\}_{n=1}^{+\infty}$ **f)** $\{n-n^2\}_{n=1}^{+\infty}$

6. Χρησιμοποιήστε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

**a)** $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **b)** $\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **c)** $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

**d)** $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **e)** $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **f)** $\left\{\frac{5^n}{2^{(n^2)}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

7. Να δείξετε ότι είναι τελικά γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα η ακολουθία:

**a)** $\{2n^2-7n\}_{n=1}^{+\infty}$ **b)** $\left\{\frac{n}{n^2+10}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**c)** $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **d)** $\{n^5e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$