Ασκήσεις

Δευτέρα, 4 Νοεμβρίου 2024 12:11 μμ

4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει και να βρείτε το όριό της.

$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ όπου $L \in \mathbb{R}$

Δείτε Ασκ. 3

$$\boxed{\frac{10}{n+1}\cdot a_n = a_{n+1}}$$

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{n+1}}$$

$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = L$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10}{n+1} a_n =$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{10}{n+1}\right)\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)$$

$$= 0 \cdot L = 0$$

Άρα $L = 0$.

5. Χρησιμοποιήστε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **b)** $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **c)** $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

d) $\left\{\frac{n}{4n-1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **e)** $\{n - 2^n\}_{n=1}^{+\infty}$ **f)** $\{n - n^2\}_{n=1}^{+\infty}$

α) $a_n = \frac{1}{n}$

Έστω a_n γν. αύξουσα

$$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} > 1$$

$$\Rightarrow n > n+1$$

$$\Rightarrow n-n > 1 \Rightarrow 0 > 1 \quad \text{Αδύνατο}$$

Άρα α_n γν. φθίνουσα

b) $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n}$

Έστω α_n γν. φθίνουσα

$\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow n+1 < n \Rightarrow n+1-n < 0$$

$$\Rightarrow 1 < 0 \quad \text{Άτοπο.}$$

Άρα α_n γν. αύξουσα.

c) $\alpha_n = \frac{n}{2n+1}$

Έστω γν. φθίνουσα

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0 \Rightarrow \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2(n+1)+1} < \frac{n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2(n+1)+1} < \frac{n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow (n+1)(2n+1) < n\cdot\left(2(n+1)+1\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{2n^2} + n + \cancel{2n} + 1 < \cancel{2n^2} + 2n + \cancel{n}$$

$$\Rightarrow 1 < 0 \quad \text{Άτοπο.}$$

Άρα α_ν γν. αύξουσα

d) $\alpha_\nu = \dfrac{n}{4n-1}$

Έστω α_ν φθίνουσα

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu < 0 \Rightarrow \frac{n+1}{4(n+1)-1} - \frac{n}{4n-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{4n+3} < \frac{n}{4n-1}$$

$$\Rightarrow (n+1)(4n-1) < n(4n+3)$$

$$\Rightarrow \cancel{4n^2} + 4n - \cancel{n} - 1 < \cancel{4n^2} + 3\cancel{n}$$

$$\Rightarrow -1 < 0 \quad \text{Ισχύει.}$$

Άρα α_ν γν. φθίνουσα

e) $\alpha_\nu = n - 2^n$

Έστω α_ν αύξουσα

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu > 0$$

$$\Rightarrow (n+1) - 2^{n+1} - (n - 2^n) > 0$$

$$\Rightarrow \cancel{n} + 1 - 2^{n+1} - \cancel{n} + 2^n > 0$$

$$\Rightarrow \cancel{n}+1-2^{n+1}-\cancel{n}+2^{n}>0$$

$$\Rightarrow 1-2^{n}\cdot 2+2^{n}>0 \qquad \boxed{\begin{array}{l} -2^{n}\cdot 2+2^{n}=-2^{n} \\ \hookrightarrow -x\cdot 2+x=-x \end{array}}$$

$$\Rightarrow 1-2^{n}>0$$

$$\Rightarrow 1>2^{n}$$

Έχουμε ότι $n\geq 1$
άρα για $n=1$ έχουμε
$1>2^1$ Άτοπο
Άρα α_n γν. φθίνουσα.

ή $\quad 2^0>2^n \Rightarrow 0>n$

$$\Rightarrow \ln 1>\ln 2^{n}$$

$$\Rightarrow 0>\underbrace{n}_{n\geq 1}\underbrace{\ln 2}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow 0>n$$

δεν ισχύει

Άρα α_n γν. φθίνουσα

7) $\alpha_n = n - n^2$

Έστω α_n γν. αύξουσα

$$\alpha_{n+1}>\alpha_n$$

$$\Rightarrow (n+1)-(n+1)^2>n-n^2$$

$$\Rightarrow n+1-(n^2+2n+1)>n-n^2$$

$$\Rightarrow \cancel{n}+\cancel{1}-\cancel{n^2}-2n-\cancel{1}-\cancel{n}+\cancel{n^2}>0$$

$$\Rightarrow -2n>0$$

Έχουμε $n\geq 1$
Άρα για $n=1$
$-2>0$ άτοπο.

Άρα η α_n είναι
γν. φθίνουσα.

Ασκήσεις

Δευτέρα, 4 Νοεμβρίου 2024 1:02 μμ

6. Χρησιμοποιήστε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

a) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **b)** $\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **c)** $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

d) $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **e)** $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **f)** $\left\{\frac{5^n}{2^{(n^2)}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

α) $\alpha_n = \frac{n}{2n+1}$

Έστω γν. φθίνουσα

$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1 \Rightarrow \frac{\frac{n+1}{2(n+1)+1}}{\frac{n}{2n+1}} < 1$

$\Rightarrow \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+3)\,n} < 1$

$\Rightarrow \frac{2n^2+2n+n+1}{2n^2+3n} < 1$

$\Rightarrow \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n} < 1$

$2n^2+3n > 0$

$$\dots \quad (2\mu^2+3\mu) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2\mu^2}+\cancel{3\mu}+1 < \cancel{2\mu^2}+\cancel{3\mu}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < 0 \qquad \text{Αδύνατο}$$

Άρα α_μ γν. αύξουσα

b) $\alpha_\mu = \dfrac{2^\mu}{1+2^\mu}$

Έστω α_μ γν. φθίνουσα.

$$\frac{\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu} < 1 \Rightarrow \frac{\dfrac{2^{\mu+1}}{1+2^{\mu+1}}}{\dfrac{2^\mu}{1+2^\mu}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2^{\mu+1}\cdot(1+2^\mu)}{2^\mu(1+2^{\mu+1})} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\cancel{2^\mu}(1+2^\mu)}{\cancel{2^\mu}(1+2^{\mu+1})} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(1+2^\mu)}{1+2^{\mu+1}} < 1$$

$$\leadsto 2\cdot 2^\mu$$

$$\dots(\dots 2^\mu) < 1 + 2^{\mu+1}$$

$$\Rightarrow \quad 2(1+2^n) < 1 + 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + 2\cdot\cancel{2^n} < 1 + 2\cdot\cancel{2^n}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < 0$$ Άτοπο. Άρα α_n γν. αύξουσα

c) $\alpha_n = n e^{-n}$

Έστω α_n γν. αύξουσα.

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > 1 \Rightarrow \frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{n e^{-n}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n+1)\cancel{e^{-n}}\cdot e^{-1}}{n\,\cancel{e^{-n}}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n+1)e^{-1}}{n} > 1$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)e^{-1} > n$$

$$\Rightarrow \quad n\cdot e^{-1} + e^{-1} > n$$

$$\Rightarrow \quad n\cdot e^{-1} - n + e^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow \quad n(e^{-1}-1) + e^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow \quad n(e^{-1}-1) > -e^{-1}$$

γν. $e \approx 2.7$

$\Rightarrow \quad n(e^{-1}-1) > -e^{-1}$

$\Rightarrow \quad n > \dfrac{-e^{-1}}{e^{-1}-1} \approx \left| \dfrac{-\frac{1}{2,7}}{\frac{1}{1,7}} \right|$ γιατί $e \approx 2.7$

$\sim 0 < 1$

Ισχύει

Άρα a_n γν. αύξουσα

7. Να δείξετε ότι είναι τελικά γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα η ακολουθία:

a) $\{2n^2 - 7n\}_{n=1}^{+\infty}$

b) $\left\{\dfrac{n}{n^2+10}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

c) $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

d) $\{n^5 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$