Ασκήσεις

Δευτέρα, 11 Νοεμβρίου 2024 12:13 μμ

6. Χρησιμοποιήστε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα:

a) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **b)** $\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **c)** $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

d) $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **e)** $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **f)** $\left\{\frac{5^n}{2^{(n^2)}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

d) $\alpha_n = \frac{10^n}{(2n)!}$

Έστω α_n φθίνουσα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{10^{n+1}}{(2\cdot(n+1))!}}{\frac{10^n}{(2n)!}}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10^{n+1}\cdot(2n)!}{10^n\,(2\cdot(n+1))!} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10\cdot\cancel{10^n}\,(2n)!}{\cancel{10^n}\,(2n+2)!} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10\cdot(2n)!}{\ldots} < 1$$

$(2n)! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n)$

$$\Rightarrow \frac{10\cdot(2n)!}{(2n+2)!} < 1$$

$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)\cdot(2n)$

$(2n+2)! = \underbrace{1\cdot 2\cdot \ldots (2n-1)(2n)}_{(2n)!}(2n+1)(2n+2)$

$$\Rightarrow \frac{10\cdot\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\cdot(2n+1)(2n+2)} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10}{(2n+1)(2n+2)} < 1$$

$$\Rightarrow 10 < (2n+1)(2n+2)$$

$$\Rightarrow 10 < (2n)^2 + 4n + 2n + 2$$

$$\Rightarrow 10 < 4n^2 + 6n + 2$$

$$\Rightarrow 5 < 2n^2 + 3n + 1$$

$$\Rightarrow 0 < 2n^2 + 3n - 4$$

ως είναι αύξουσα κ' $n \geq 1$

Για $n=1$ έχουμε $0<1$ ισχύει. Άρα a_n φθίνουσα.

$$\Delta = 3^2 - 2\cdot 4(-4) = 41$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2\cdot 2} = \begin{cases} \frac{3,4}{4} \\ -\frac{9,4}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \left(n - \frac{3,4}{4}\right)\left(n + \frac{9,4}{4}\right)$$

Για να ισχύει θα πρέπει ... είναι >0

Για να ισχύη θα πρέπη
ή και οι 2 παρενθέσεις >0
ή και οι 2 παρενθ. <0

Έστω ότι είναι θετικές οι παρενθ.

$$\begin{cases} n - \frac{3,4}{4} > 0 \\ n + \frac{9,4}{4} > 0 \end{cases}$$

ισχύη για $n \geq 1$

Άρα a_n φθίνουσα

e) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$

Έστω φθίνουσα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} < 1$$

$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}_{n!} (n+1)$
$= n! \, (n+1)$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \; \cancel{n!}}{n^n \; \cancel{n!} \; \cancel{(n+1)}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < 1 \qquad *$$

Α' τρόπος

(*) $\Rightarrow (n+1)^n < n^n$ για $n = 1, 2, 3, \ldots > 0$

ισχύη ότι:

$\Rightarrow n+1 < n$

$\Rightarrow 1 < 0$ δεν ισχύη. Άρα δη αύξουσα

Β τρόπος

(*) $\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 1$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \ln 1$

$\Rightarrow n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 0$

$\ln\left(\frac{\alpha}{b}\right) = \ln\alpha - \ln b$

$\ln(\alpha \cdot b) = \ln\alpha + \ln b$

$\ln(\alpha^b) = b\ln\alpha$

$\ln e = 1$

$\ln 1 = 0$

(**)

$$\Rightarrow \quad \underbrace{n}_{n>0} \cdot \underbrace{\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)}_{?} < 0 \quad \text{(**)} \quad \text{όπου } n = 1, 2, \ldots$$

Για να ισχύει θα πρέπει να είναι <0.

$$\ln(n+1) - \ln(n) < 0$$

$$\Rightarrow \ln(n+1) < \ln(n)$$

$$\Rightarrow n+1 < n$$

$$\Rightarrow 1 < 0$$

Δεν ισχύει. Άρα (**) δεν ισχύει.

Άρα a_n αύξουσα.

ζ) $a_n = \dfrac{5^n}{2^{n^2}}$

Έστω a_n φθίνουσα.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{5^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}}{\dfrac{5^n}{2^{n^2}}} < 1$$

$$\frac{5}{2^{n^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{5^{n+1}\cdot 2^{n^2}}{5^{n}\cdot 2^{(n+1)^2}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{5^{n}}\cdot 5\cdot 2^{n^2}}{\cancel{5^{n}}\cdot 2^{n^2+2n+1}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{5\cdot \cancel{2^{n^2}}}{\cancel{2^{n^2}}\cdot 2^{2n}\cdot 2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2^{2n}\cdot 2} < 1$$

$$\Rightarrow 5 < 2^{2n}\cdot 2$$

$$\Rightarrow \underline{5 < 2^{2n+1}}$$

Επειδή $n=1,2,\dots$ ισχύει. Άρα γν. φθίνουσα.

$$\Rightarrow \ln 5 < \ln 2^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \ln 5 < (2n+1)\ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 5}{\ln 2} < 2n+1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 5}{\ln 2} - 1 < 2n$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 5}{2\ln 2} - \frac{1}{2} < n$$

$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$\frac{\ln 5}{2\ln 2} \simeq 1,16$

όπου

$1,16 - 0,5 = 0,66$

Ισχύει

Άρα a_n φθίνουσα.

Ασκήσεις

Δευτέρα, 11 Νοεμβρίου 2024   12:13 μμ

7. Να δείξετε ότι είναι τελικά γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα η ακολουθία:

a) $\{2n^2 - 7n\}_{n=1}^{+\infty}$ **b)** $\left\{\dfrac{n}{n^2+10}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

c) $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **d)** $\{n^5 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

α) $\alpha_\nu = 2\nu^2 - 7\nu$

Έστω α_ν αύξουσα

$\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$

$\Rightarrow 2\nu^2 - 7\nu < 2(\nu+1)^2 - 7(\nu+1)$

$\Rightarrow 2\nu^2 - \cancel{7\nu} < 2\cdot(\nu^2+2\nu+1) - \cancel{7\nu} - 7$

$\Rightarrow \cancel{2\nu^2} < \cancel{2\nu^2} + 4\nu + 2 - 7$

$\Rightarrow 4\nu - 5 > 0$

$\Rightarrow 4\nu > 5$

$\Rightarrow \nu > \dfrac{5}{4} = 1,25$ όμως $\nu \geq 1$

Άρα $\nu \geq 2$ (δηλ $\nu = 2, 3, 4, \ldots$)

η α_ν είναι τελικά αύξουσα.

b) $\alpha_n = \dfrac{n}{n^2+10}$

Έστω α_n φθίνουσα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{n+1}{(n+1)^2+10}}{\dfrac{n}{n^2+10}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)(n^2+10)}{n\cdot((n+1)^2+10)} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{n^3+10\cdot n+n^2+10}{n\cdot(n^2+2n+1+10)} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{n^3+n^2+10n+10}{n^3+2n^2+11\cdot n} < 1$$

$$\Rightarrow \cancel{n^3}+n^2+10n+10 < \cancel{n^3}+2n^2+11\cdot n$$

$$\Rightarrow n^2+n-10 > 0$$

$$\Rightarrow n^2+n > 10$$

Γνωρίζουμε ότι n^2+n πάντα >0

Για $n=1$ έχουμε $1^2+1=2<10$

Για $n=2$ -//- $2^2+2=6<10$

Για $n=3$ -//- $3^2+3=12>10$

Άρα για $n \geq 3$, a_n είναι

τελικά γν. φθίνουσα

c) $a_n = \dfrac{n!}{3^n}$

Έστω a_n ~~φθίνουσα.~~ αύξουσα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{>}{<} 1$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\dfrac{n!}{3^n}} \overset{>}{<} 1$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!\;3^n}{n!\;3^{n+1}} \overset{>}{<} 1$$

$(n+1)! = n!\,(n+1)$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{n!}(n+1)\,\cancel{3^n}}{\cancel{n!}\;\cancel{3^n}\cdot 3} \overset{>}{<} 1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{3} \gtrless 1$$

$$\Rightarrow n+1 \gtrless 3$$

$$\Rightarrow n \gtrless 2 \to \boxed{n > 2}$$

Άρα a_n είναι τελικά γν. αύξουσα για $n \geq 3$.

(για $n > 2 \Rightarrow$ για $n \geq 3$)

d) $a_n = n^5 e^{-n}$

Έστω a_n φθίνουσα

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\Rightarrow (n+1)^5 \cdot e^{-(n+1)} < n^5 e^{-n}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^5}{e^{n+1}} < \frac{n^5}{e^n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n+1)^5}{e^{n+1}} < \frac{n^5}{e^n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n+1)^5}{\cancel{e^n}\cdot e} < \frac{n^5}{\cancel{e^n}}$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)^5 < e\cdot n^5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n+1)^5}{n^5} < e$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 < e$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 < \ln e$$

$$\Rightarrow \quad 5\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \ln e$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{5}\ln e$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \ln e^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n+1}{n} < e^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \quad n+1 < n\cdot e^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \quad n\left(\underbrace{1-e^{\frac{1}{5}}}_{<0}\right)+1<0$$

Προσοχή! $e^{\frac{1}{5}} \simeq 1.2$

$$\Rightarrow \quad -n\left(\underbrace{e^{\frac{1}{5}}-1}_{>0}\right)+1<0$$

$$\Rightarrow \quad 1 < n\left(e^{\frac{1}{5}}-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e^{\frac{1}{5}}-1} < n$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}52 < n$$

Άρα για $n \geq 5$

α_n τελικά

γν. φθίνουσα.