Σειρές

Σειρές

Πχ. $\alpha_n = n$

Το σύμβολο Σ του αθροίσματος

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{n=1}^{4} a_n = \sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{i=1}^{4} a_i$$

$$\sum_{n=1}^{4} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{k-1} + a_k = \sum_{n=m}^{k} a_n \quad (k > m)$$

$$\sum_{n=3}^{5} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3 + 4 + 5 = 12$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n + a_{m+1} = \sum_{n=1}^{m+1} a_n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n \pm \sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{m} (a_n \pm b_n)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad (k > m)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{m} a_n$

$$\sum_{n=1}^{5} \alpha_n = \sum_{n=1}^{3} \alpha_n + \sum_{n=4}^{5} \alpha_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_4 + \alpha_5)$$

$$\sum_{n=1}^{3} \alpha_n + \sum_{n=1}^{3} b_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (\alpha_1 + b_1) + (\alpha_2 + b_2) + (\alpha_3 + b_3) = \sum_{n=1}^{3} (\alpha_n + b_n)$$

Έστω η ακολουθία a_n. Μια έκφραση της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ονομάζεται άπειρη σειρά (ή απλώς σειρά). Ο a_n αποτελεί το n-οστό όρο της σειράς.

Από την ακολουθία a_n ορίζεται μια νέα ακολουθία s_n, με βάση τις σχέσεις

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$\vdots$

Καθένας από τους όρους αποτελεί μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

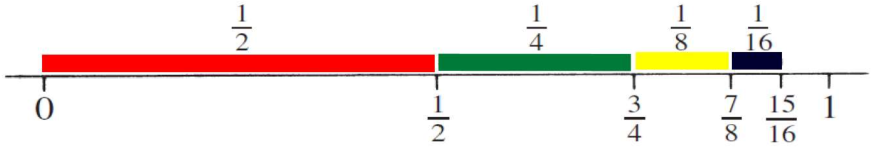
Παραδείγματα

1. Αν $a_n = n$ τότε:

$$s_1 = a_1 = 1$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3 + 3 = 6$$
$$s_4 = s_3 + a_4 = 6 + 4 = 10$$
$$s_5 = s_4 + a_5 = 10 + 5 = 15$$
$$s_6 = s_5 + a_6 = 15 + 6 = 21$$
$$\dots$$

2. Αν $a_n = \frac{1}{2^n}$ τότε:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} = 0.5$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75$$
$$s_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875$$
$$s_4 = 0.9375$$
$$s_5 = 0.96875$$
$$s_6 = 0.984375$$
$$\dots$$



<u>**Σύγκλιση σειρών**</u>

1) Μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** στον αριθμό $L \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν η ακολουθία s_n των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στον L. Τότε γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Ο πραγματικός αριθμός L στον οποίο συγκλίνει μια σειρά ονομάζεται **άθροισμα** ή **όριο** της σειράς.

Μία σειρά **συγκλίνει** στο $+\infty$ (στο $-\infty$), αν και μόνο αν η ακολουθία s_n των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \left(\Psi \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty \right)$$

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η σειρά $1 + 1 + 1 + \dots$

Ο n-οστός όρος της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων είναι

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ όροι}} = n$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

τελικά

$$1 + 1 + 1 + \dots = +\infty$$

και η σειρά απειρίζεται θετικά.

2) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Το αντίθετο δεν ισχύει. Δηλαδή, αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

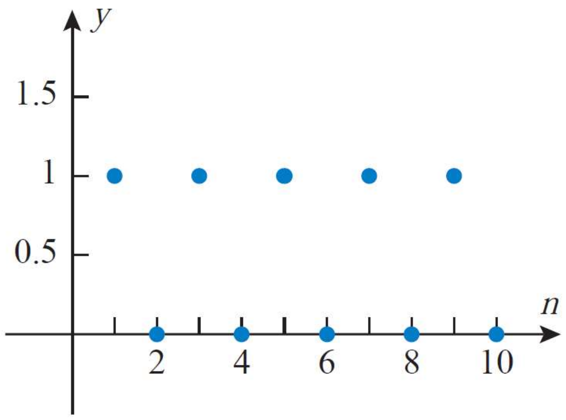
<u>Παράδειγμα</u>

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ αν και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ή αν το όριο της a_n δεν υπάρχει, τότε η σειρά **δε συγκλίνει στο** $\mathbb{R}$ (κριτήριο μη-σύγκλισης).

<u>Παραδείγματα</u>

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-3}$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ διότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-3} = \frac{3}{4} \neq 0$.
2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ διότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$.



$a_n =$ $\boxed{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots}$

<u>Πράξεις/σχέσεις μεταξύ σειρών</u>

- Αν οι σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ είναι **συγκλίνουσες**, τότε και η $\sum(\kappa \cdot a_n + \lambda \cdot b_n)$ είναι **συγκλίνουσα** ($\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$) και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\kappa \cdot a_n \pm \lambda \cdot b_n) = \kappa \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- Αν η $\sum a_n$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, τότε και η $\sum(\kappa \cdot a_n)$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$ ($\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$).
- Αν για δύο **συγκλίνουσες** σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε n, τότε θα είναι και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- Αν η σειρά $\sum a_n$ **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, ενώ η σειρά $\sum b_n$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, τότε η σειρά $\sum(a_n + b_n)$ **δε συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$.

- Αν οι σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ **δε συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$**, τότε η σειρά $\sum(a_n + b_n)$ μπορεί είτε να είναι, είτε να μην είναι **συγκλίνουσα**.

π.χ. $\sum a_n = (-1)^n$ ⇝ αποκλίνει

$\sum b_n = (-1)^{n+1}$ ⇝ αποκλίνει

$\sum(a_n + b_n) = \sum\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right)$

$= \sum\left((-1)^n + (-1)^n(-1)\right)$

$= \sum\left((-1)^n - (-1)^n\right)$

$= 0$ ⇝ συγκλίνει

Βασικές ιδιότητες

1. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ τότε είναι **φραγμένη**. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
2. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι φραγμένη και έχει όλους τους όρους της θετικούς, τότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.
3. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν είναι φραγμένη και έχει όλους τους όρους της θετικούς, τότε απειρίζεται θετικά.
4. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ τότε η ακολουθία a_n είναι μηδενική. Αν η ακολουθία δεν είναι μηδενική, η σειρά δε συγκλίνει.

Γεωμετρικές σειρές

Μια σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \ldots + a\lambda^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda^{n-1}$$

ονομάζεται **γεωμετρική**, με **λόγο** λ.

- Η παραπάνω σειρά **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$ μόνο όταν $|\lambda| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \begin{cases} \boxed{\dfrac{a}{1-\lambda}}, & |\lambda| < 1 \\ a\cdot(+\infty), & \lambda \geq 1 \ (a \neq 0) \\ \text{κυμαίνεται}, & \lambda \leq -1 \ (a \neq 0) \end{cases}$$

γν. $\alpha_n = \alpha \cdot \lambda^n$

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

Το n-οστό μερικό άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς με $\lambda \neq 1$ είναι:

$$s_n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \ldots + a\lambda^{n-1} = \boxed{a\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}}$$

- Οι **ρητοί αριθμοί** μπορούν να αναπαρασταθούν με τη βοήθεια συγκλινουσών γεωμετρικών σειρών, π.χ.

$$\begin{aligned} 2.272727\ldots &= 2.\overline{27} \\ &= 2 + 0.27 + 0.0027 + \ldots \\ &= 2 + \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \ldots \\ &= 2 + \frac{27}{100} + \frac{27}{100^2} + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 + \underbrace{\boxed{\frac{27}{100}}}_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \\ &= 2 + \frac{27}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} \\ &= 2 + \frac{27}{99} = \frac{225}{99} = \frac{25}{11} \end{aligned}$$

$\to |\lambda| < 1$

Ρητός: $\frac{A}{B}$

Παρατηρήστε ότι η γεωμετρική σειρά είναι το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Παραδείγματα γεωμετρικών σειρών

$1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$ $\boxed{a=1,\ \lambda=2}$ $\rightsquigarrow +\infty$

$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$ $\boxed{a=\frac{3}{10},\ \lambda=\frac{1}{10}}$ $\rightsquigarrow$ συγκλίνει

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}+\cdots$ $\boxed{a=\frac{1}{2},\ \lambda=-\frac{1}{2}}$ $\rightsquigarrow$ συγκλίνει

$1+1+1+\cdots+1+\cdots$ $\boxed{a=1,\ \lambda=1}$

$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$ $\boxed{a=1,\ \lambda=-1}$

$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ $\boxed{a=1,\ \lambda=x}$

$\downarrow$

συγκλίνει μόνο όταν $|x|<1$

ή $-1<x<1$

ή $x\in(-1,1)$

Τηλεσκοπικές σειρές

Μια σειρά ονομάζεται **τηλεσκοπική**, αν είναι της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{n+1}-b_n\right)$$

Αν η ακολουθία (b_n) είναι **συγκλίνουσα**, τότε και η αντίστοιχη τηλεσκοπική σειρά θα είναι **συγκλίνουσα**.

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\left(b_{i+1}-b_i\right)=\left(\cancel{b_2}-b_1\right)+\left(\cancel{b_3}-\cancel{b_2}\right)+\ldots+\left(b_{n+1}-\cancel{b_n}\right)$$

$$=b_{n+1}-b_1 \quad\rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}-b_1\right)$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots$

$$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}\rightarrow A=1, B=-1$$

n-οστό μερικό άθροισμα $\Rightarrow$ $s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

θέτω:

(*) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$ όπου A,B άγνωστοι

$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)}=\frac{A(n+1)}{n(n+1)}+\frac{B\cdot n}{n(n+1)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)}{n(n+1)} + \frac{B\cdot n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+B\cdot n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\boxed{0\cdot n}+\boxed{1}}{n(n+1)} = \frac{\boxed{(A+B)\cdot n}+\boxed{A}}{n(n+1)}$$

Άρα θα πρέπει

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \end{matrix}$$

Οπότε $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1}$

Αρμονικές σειρές

Μια σειρά ονομάζεται **αρμονική τάξης *p***, αν είναι της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

όπου p ρητός αριθμός.

Κριτήριο σύγκλισης

Μια αρμονική σειρά **συγκλίνει** στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$p > 1$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 18 Νοεμβρίου 2024   1:36 μμ

1. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} 5^{1-k}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \cdot q^n$ αν $|q|<1$ $\rightarrow \frac{\alpha}{1-q}$

α) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k =$ άρα $\alpha = 5$, $q = \frac{1}{4}$

όπου $|q| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$

συγκλίνει

$= \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} 3^{2k} \cdot 5^{1-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 3^{2k} \cdot \frac{5}{5^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \frac{3^{2k}}{5^k}$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{3^2}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^k \rightarrow 1$ για $k=1$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{k-1} \rightarrow 0$ για $k=1$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 9 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}$

άρα $\alpha = 9$ κ' $q = \frac{9}{5}$ όπου $|q| > 1$

οπότε δε συγκλίνει