Ασκήσεις

Δευτέρα, 18 Νοεμβρίου 2024 1:36 μμ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \cdot q^n$$ αν $|q|<1$ $\to \dfrac{\alpha}{1-q}$

1. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} 5^{1-k}$

α) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k =$ άρα $\alpha = 5$, $q = \frac{1}{4}$

όπου $|q| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$

συγκλίνει

$$= \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} 3^{2k} \cdot 5^{1-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 3^{2k} \cdot \frac{5}{5^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \frac{3^{2k}}{5^k}$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{3^2}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^k$ $\to 1$ για $k=1$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 5 \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}$ $\to 0$ για $k=1$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} 9 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}$

άρα $\alpha = 9$ κ' $q = \frac{9}{5}$ όπου $|q| > 1$

οπότε δε συγκλίνει

$$\boxed{q^k = q \cdot q^{k-1} = \frac{1}{q} \cdot q^{k+1}}$$

$q = q \cdot q = \frac{1}{q} \cdot q$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 25 Νοεμβρίου 2024 12:06 μμ

2. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = 0.784784784\ldots$ Να βρεθούν οι τιμές των a και λ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot \lambda^n = 0.784784784\ldots = 0.784 + 0.000784 + \ldots$$

$$= 0.784 + 0.784 \cdot \frac{1}{1000} + 0.784 \frac{1}{1000^2} + \ldots$$

$$= 0.784 \cdot \left(\frac{1}{10^3}\right)^0 + 0.784 \cdot \left(\frac{1}{10^3}\right)^1 + 0.784 \cdot \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 + \ldots$$

Άρα $\alpha = 0.784$ κ' $\lambda = \frac{1}{10^3}$, όπου $|\lambda| < 1$ συγκλίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot \lambda^n = \frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{0.784}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{0.784}{\frac{999}{1000}} = \frac{784}{999}$$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 25 Νοεμβρίου 2024 12:06 μμ

3. Βρείτε όλες τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνει η ακόλουθη σειρά και βρείτε το άθροισμά της για αυτές τις τιμές του x.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (b) $3 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^3}{8} + \cdots + \frac{3(-1)^k}{2^k}x^k + \cdots$

α) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ Γεωμ. σειρά με $\alpha = 1$ κ' $q = x$

Συγκλίνει όταν $|q| < 1 \Rightarrow |x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{όπου } |x| < 1$$

ή

$x \in (-1, 1)$

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(-1)^k}{2^k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{-x}{2}\right)^k$$

Γεωμ. σειρά με $\alpha = 3$, $q = -\frac{x}{2}$

Συγκλίνει όταν $|q| < 1 \Rightarrow \left|-\frac{x}{2}\right| < 1$

$\Rightarrow |x| < 2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot q^k = 3 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{3}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{6}{x+2} \quad \text{όπου } |x| < 2$$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 25 Νοεμβρίου 2024 12:06 μμ

4. Ελέγξτε αν η ακόλουθη σειρά συγκλίνει. Αν συγκλίνει, να βρεθεί το άθροισμά της.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$$

Τηλεσκοπική σειρά

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)}{k(k+1)} + \frac{B \cdot k}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{A(k+1) + B \cdot k}{k \cdot (k+1)} = \frac{Ak + A + Bk}{k \cdot (k+1)} = \frac{(A+B)k + A}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{0 \cdot k + 1}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k + A}{k(k+1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow B = -1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{S_k} + \dots$$

$$S_k = \frac{1}{1} - \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 25 Νοεμβρίου 2024 12:06 μμ

5. Βρείτε τις ακριβείς τιμές των τεσσάρων πρώτων όρων της σειράς, βρείτε μια κλειστή μορφή για το n-οστό όρο της σειράς και προσδιορίστε εάν η σειρά συγκλίνει υπολογίζοντας το όριο του n-οστού όρου της. Εάν η σειρά συγκλίνει, τότε δηλώστε το άθροισμά της.

(a) $2+\frac{2}{5}+\frac{2}{5^2}+\cdots+\frac{2}{5^{k-1}}+\cdots$

(b) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2^2}{4}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{4}+\cdots$

(c) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots$

α) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$ γεωμ. σειρά

$|q| = \left|\frac{1}{5}\right| < 1$ συγκλίνει στο $\frac{\alpha}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$

$S_1 = 2$

$S_2 = 2 + 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{12}{5}$

$S_3 = 2 + 2\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{1}{25} = \frac{62}{25}$

$S_4 = S_3 + 2\cdot\frac{1}{125} = \frac{62\cdot 5+2}{125}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} 2^n$ γεωμ. σειρά

$|q| = |2| > 1$ αποκλίνει

$S_1 = \frac{1}{4}$

$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 2$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{4} \cdot 3$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{4} \cdot 4$$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ τηλεσκ. σειρά

θέλουμε να γράψουμε

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} =$$

$$= \frac{A(k+2) + B(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(A+B)k + 2A + B}{(k+1)(k+2)}$$

Άρα

$$\frac{0 \cdot k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(A+B)k + (2A+B)}{(k+1)(k+2)}$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 2A+B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

Οπότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\sum_{k=1} \frac{\quad}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1} \left(\frac{\quad}{k+1} - \frac{\quad}{k+2} \right)$$

$$S_k = \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2} \right) + \left(\frac{1}{2+1} - \frac{1}{3+2} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2}$$

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\frac{1}{2}$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 25 Νοεμβρίου 2024 12:08 μμ

6. Βρείτε τις ακριβείς τιμές για τα πρώτα τέσσερα μερικά αθροίσματα, βρείτε μια κλειστή μορφή για το n-οστό μερικό άθροισμα και προσδιορίστε εάν η σειρά συγκλίνει υπολογίζοντας το όριο του n-οστού μερικού αθροίσματος. Εάν η σειρά συγκλίνει, τότε δηλώστε το άθροισμά της.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$

α) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

$\to$ Για $k=1$ έχω 0.

Άρα έχουμε Γεωμ. σειρά

όπου $\alpha = q = \frac{1}{4}$

Αφού $|q| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$ η σειρά συγκλίνει

στο $\frac{\alpha}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}$ Γεωμ. σειρά με $\alpha=1$, $q=4$

$|q| = |4| > 1$ αποκλίνει

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$

$S_k = \left(\frac{1}{1+3}-\frac{1}{1+4}\right) + \left(\frac{1}{2+3}-\frac{1}{2+4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$

$= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{k+4}$

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k+4}\right) = \frac{1}{4}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\frac{1}{4}$

Ασκήσεις

7. Προσδιορίστε εάν η σειρά συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το άθροισμά της.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k-1}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9k^2+3k-2}$ (h) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

(i) $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k-2}$ (j) $\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$

(k) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k+2}}{7^{k-1}}$ (l) $\sum_{k=1}^{\infty}5^{3k}7^{1-k}$

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ Γεωμ. σειρά με $\alpha=1$, $q=-\frac{3}{4}$

$|q|=\left|-\frac{3}{4}\right|<1$ άρα συγκλίνει

στο $\frac{\alpha}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{4}{7}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

Γεωμ. σειρά με $\alpha=\frac{8}{27}$, $q=\frac{2}{3}$

$|q|=\left|\frac{2}{3}\right|<1$ συγκλίνει στο $\frac{\alpha}{1-q}=\frac{\frac{8}{27}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{8}{9}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{7}{6^{k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}7\cdot\left(\frac{-1}{6}\right)^{k-1}$ Γεωμ. σειρά

, $q=-\frac{1}{}$

$k=1$

με $\alpha = 7,\ q = -\frac{1}{6}$

$|q| = \left|-\frac{1}{6}\right| < 1$ συγκλίνει

στο $\frac{\alpha}{1-q} = \frac{7}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)} = 6$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

Γεωμ. σειρά με $\alpha = \frac{9}{4},\ q = -\frac{3}{2}$

$|q| = \left|-\frac{3}{2}\right| > 1$ αποκλίνει

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)} \overset{*}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k+2} + \frac{B}{k+3}$$

$$= \frac{A(k+3) + B(k+2)}{(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(A+B)k + 3A + 2B}{(k+2)(k+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \quad *$$

$$S_k = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{k+3}$$

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{3}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\frac{1}{3}$.