Ασκήσεις

Δευτέρα, 2 Δεκεμβρίου 2024 12:06 μμ

7. Προσδιορίστε εάν η σειρά συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το άθροισμά της.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k-1}}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9k^2+3k-2}$

(h) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

(i) $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k-2}$

(j) $\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$ ~> H/w

(k) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k+2}}{7^{k-1}}$

(l) $\sum_{k=1}^{\infty}5^{3k}7^{1-k}$

f) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right) =$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ γεωμ. σειρά

, a 1

$\sum_{k=1} \frac{\;}{4}\left(\frac{\;}{2}\right)$ γεωμ. σειρά

με $\alpha = \frac{1}{4}$ κ' $q = \frac{1}{2}$

$|q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ συγκλίνει στο $\frac{\alpha}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2+3k-2}$

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 9\cdot(-2) = 9 + 72 = 81$

$\rho_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2\cdot 9} = \begin{cases} -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \\ \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{9}\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\boxed{\frac{0\cdot k + 1}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)}} = \frac{A}{k+\frac{2}{3}} + \frac{B}{k-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{A\cdot\left(k-\frac{1}{3}\right)}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)} + \frac{B\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{A\left(k-\frac{1}{3}\right) + B\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{Ak - \frac{A}{3} + Bk + \frac{2B}{3}}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{(A+B)k + \left(\frac{2B}{3} - \frac{A}{3}\right)}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)}}$$

$$\frac{0\cdot k+1}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)} = \frac{(A+B)\cdot k + \left(\frac{2B}{3} - \frac{A}{3}\right)}{\left(k+\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{2B}{3} - \frac{A}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{B=-A}$$

$$\frac{2B-A}{3} = 1 \Rightarrow 2B-\underline{A}=3$$

$$\Rightarrow 2B \underline{+B} = 3$$

$$\Rightarrow 3B = 3$$

$$\Rightarrow B = 1$$

$$A = -1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{k+\frac{2}{3}} + \frac{1}{k-\frac{1}{3}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-\frac{1}{3}} - \frac{1}{k+\frac{2}{3}}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}^{\;\frac{3}{2}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{k-\frac{1}{3}}} - \frac{1}{k+\frac{2}{3}}\right)$$

$$S_k = \left(\frac{1}{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{1}{\frac{5}{3}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\frac{5}{3}}} - \cancel{\frac{1}{\frac{8}{3}}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{k-\frac{1}{3}}} - \frac{1}{k+\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{k+\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{k+\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Άρα μσειρά συγκλίνει στο $\frac{3}{2}$

h) $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{\substack{k=2\\ -1}}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\cdot(k+2)}}$$

$+1 \qquad +1$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} = \frac{A(k+2)}{k} + \frac{B\cdot k}{k+2}$$

$$= \frac{A(k+2)+B\cdot k}{k\cdot(k+2)} = \frac{(A+B)k+2A}{k(k+2)}$$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{(A+B)k+2A}{k(k+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right)$$

$$\left(1 \ \dots \ \cancel{1}\right) + \left(1 \ \dots - \cancel{1}\right) + \left(\cancel{1} - \cancel{1}\right) + \dots$$

$$S_k = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{8}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{k-2}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{k}}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{k-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{k}} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2}$$

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{k+1}}^{\to 0} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{k+2}}^{\to 0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$ Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\frac{3}{4}$

$$\boxed{\sum_{k=A}^{+\infty} B^k = \sum_{k=A-2}^{+\infty} B^{k+2} = \sum_{k=A+2}^{+\infty} B^{k-2}}$$

i) $$\sum_{\substack{k=3 \\ -2}}^{+\infty} \frac{1}{\underset{+2}{k-2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Αρμονική σειρά με $p=1$. Αποκλίνει.

κ) $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^{k+2}}{7^{k-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^2 4^k}{7^{-1} \cdot 7^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^2}{\frac{1}{7}} \cdot \frac{4^k}{7^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 7\cdot 4^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} 7\cdot 4^2 \cdot \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 4^3 \left(\frac{4}{7}\right)^{k-1}$$

Γεωμ. σειρά με $\alpha = 4^3$, $q = \frac{4}{7}$

$|q| = \left|\frac{4}{7}\right| < 1$ συγκλίνει $\dfrac{4^3}{1-\frac{4}{7}} = \ldots$

ε) $$\sum_{k=1}^{+\infty} 5^{3k} \cdot 7^{1-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 5^{3k} \cdot 7 \cdot 7^{-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 7 \frac{5^{3k}}{7^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} 7 \cdot \frac{(5^3)^k}{7^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 7 \cdot \left(\frac{5^3}{7}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 7 \cdot \frac{5^3}{7} \cdot \left(\frac{5^3}{7}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 5^3 \cdot \left(\frac{5^3}{7}\right)^{k-1}$$

Γεωμ. σειρά με $\alpha = 5^3$ κ' $q = \frac{5^3}{7}$

$|q| = \left|\frac{5^3}{7}\right| = \left|\frac{125}{7}\right| > 1$ αποκλίνει

Κριτήρια Σύγκρισης

Κριτήρια Σύγκρισης

Σειρές Θετικών όρων

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι σειρά **θετικών όρων**, αν ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε όρο της σειράς.

- Για μια τέτοια σειρά, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι πάντα **αύξουσα**, αφού

$s_n = s_n - 1 + a_n \geq s_n - 1$

Μια σειρά θετικών όρων **συγκλίνει στο** $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν η αντίστοιχη ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι **άνω φραγμένη**.

Κριτήριο του λόγου (D' Alembert)

Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει όλους τους όρους της θετικούς πραγματικούς αριθμούς και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$$

Τότε:

- Αν $p < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.
- Αν $p > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά.
- Αν $p = 1$, δεν μπορούμε με το κριτήριο αυτό να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή όχι της σειράς.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, με $a > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = a \cdot 1$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} + \frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to+\infty} 1 + \cancel{\frac{1}{n}} \to 0$

Άρα η συγκεκριμένη σειρά είναι **συγκλίνουσα** όταν $0 < a < 1$.

Ασκήσεις

1. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ $\boxed{\text{(d) } \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k} \quad \text{(e) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}}$ $\rightsquigarrow$ H/ω

α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k!}{(k+1)!}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{k!}{k!(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2^k(k+1)}{2^{k+1} \cdot k}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{2^k (k+1)}{2^k \cdot 2 \cdot k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k+1}{2k}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k}{2k} + \frac{1}{2k} \right) = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2k}}^{\to 0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$ Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k! \, \underbrace{(k+1)^{k+1}}_{(k+1)^k \cdot (k+1)}}{\underbrace{(k+1)!}_{k!(k+1)} \, k^k}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{\cancel{k!} \, (k+1)^k \cdot \cancel{(k+1)}}{\cancel{k!} \, \cancel{(k+1)} \, k^k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k}{k} + \frac{1}{k} \right)^k$$

$$\boxed{= \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k} = e > 1$$

↳ γνωστή σειρά

Άρα η σειρά απειρίζεται θετικά