Ασκήσεις

Δευτέρα, 2 Δεκεμβρίου 2024 12:06 μμ

2. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^3}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = \alpha_n$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{3^k}{k!}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{3^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\, 3^k}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{3^k}\cdot 3\cdot \cancel{k!}}{\cancel{k!}(k+1)\cdot \cancel{3^k}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{3}{k+1} = \overset{\rho}{0} < 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 2 Δεκεμβρίου 2024 12:07 μμ

3. Βρείτε τον γενικό τύπο της σειράς και χρησιμοποιήστε το κριτήριο του λόγου για να δείξετε ότι η σειρά συγκλίνει:

$$1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n+1)-1)}}{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

όμως $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)(2n+1)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdots\cancel{(2n-1)}}{\cancel{n!}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdots\cancel{(2n-1)}(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει

Ασκήσεις

Δευτέρα, 2 Δεκεμβρίου 2024 12:07 μμ

4. Βρείτε τον γενικό τύπο της σειράς και χρησιμοποιήστε το κριτήριο του λόγου για να δείξετε ότι η σειρά συγκλίνει:

$$1+\frac{1\cdot 3}{3!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{5!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7!}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n-1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n-1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n+1)-1)}{(2(n+1)-1)!}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-1)}{(2n-1)!}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!\;1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{(2n+1)!\;1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$ όμως $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)(2n+1)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{(2n-1)!}\;\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\,(2n+1)}{\cancel{(2n-1)!}\,2n(2n+1)\cdot\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n(2n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{4n^2+2n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}\right)}=0<1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει

Πολυώνυμα Maclaurin και Taylor

Πολυώνυμα Maclaurin και Taylor

Υπενθυμίζετε από την παραγώγιση συνάρτησης ότι η γραμμική προσέγγιση μίας συνάρτησης f στο σημείο x_0 υπολογίζεται μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γραφτεί σαν 1^{ου} βαθμού πολυώνυμο ως ακολούθως:

$$\boxed{p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Η τετραγωνική προσέγγιση μίας συνάρτησης f στο σημείο x_0 υπολογίζεται μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γραφτεί σαν 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο ως ακολούθως:

$$\boxed{p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$, να βρεθεί η γραμμική και τετραγωνική προσέγγισή της στο σημείο $x_0 = 0$. Βρίσκουμε ότι $f'(x_0) = f''(x_0) = e^x$ και $f'(0) = f''(0) = e^0 = 1$.

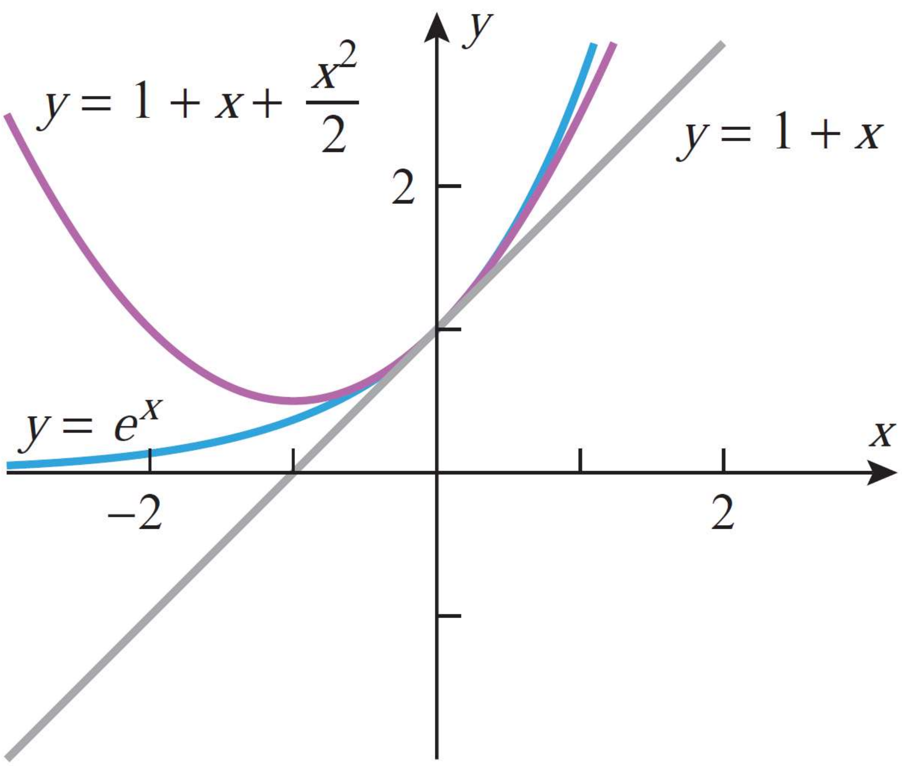
Η γραμμική προσέγγιση της f στο $x_0 = 0$ είναι

$$e^x \simeq 1 + x$$

Και η τετραγωνική προσέγγιση της f στο σημείο $x_0 = 0$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Η γραφική τους αναπαράσταση δείχνεται στο ακόλουθο σχήμα.



<u>Πολυώνυμα Maclaurin και Taylor</u>

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ν φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ορίζουμε το ν-οστού βαθμού **πολυώνυμο Taylor** για την f στο $x = x_0$ να είναι:

$$p_\nu(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$$

Αν η συνάρτηση f αναπτύσσεται γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ τότε το $p_\nu(x)$ αναφέρεται ως **πολυώνυμο Maclaurin**.

Σαν αποτέλεσμα, οι τιμές $f(x)$ σε μια περιοχή του x_0 μπορεί να προσεγγιστούν το ν-οστού βαθμού πολυώνυμο Taylor:

$$f(x) \backsimeq p_\nu(x)$$

Το πολυώνυμο Taylor μπορεί να γραφτεί σε μορφή αθροίσματος ως ακολούθως:

$$p_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

<u>Γραφική απεικόνιση πολυωνύμων Maclaurin και Taylor</u>

https://demonstrations.wolfram.com/GraphsOfTaylorPolynomials/

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα Maclaurin πολυώνυμα p_0, p_1, p_2, p_3 και p_n του e^x.

$x_0 = 0$

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$P_0 = f(0) = e^0 = 1$$

$$P_1 = P_0 + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0) = P_0 + x = 1 + x$$

$$P_2 = P_1 + \frac{f''(0)}{2!} (x-0)^2 = P_1 + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{f'''(0)}{3!} (x-0)^3 = P_2 + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$P_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Ασκήσεις

Δευτέρα, 9 Δεκεμβρίου 2024 1:49 μμ

2. Να βρεθούν τα n-οστά Maclaurin πολυώνυμα των $\rightsquigarrow x_0 = 0$
(a) $\sin(x)$
(b) $\cos(x)$ $\rightsquigarrow$ H/W

α) $f(x) = \sin(x)$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$, $f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(0) = 0$

$\sin(0) = 0$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$P_0 = f(x_0) = \sin(0) = 0$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{1} \cdot x = x$$

$$P_2 = P_1 + \frac{0}{2!} x^2 = P_1$$

$$P_3 = P_2 + \frac{-1}{3!} x^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4 = P_3 + \frac{0}{4!} x^4 = P_3$$

$$P_5 = P_4 + \frac{1}{5!} x^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$P_{2k+1} = P_{2k+2} = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$