

5. Το μοντέλο Beverton–Holt χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις αλλαγές σε έναν πληθυσμό από τη μια γενιά στην άλλη κάτω από ορισμένες υποθέσεις. Εάν ο πληθυσμός στη γενιά n δίνεται από το x_n , το μοντέλο Beverton–Holt προβλέπει ότι ο πληθυσμός στην επόμενη γενιά ικανοποιεί

$$x_{n+1} = \frac{RKx_n}{K + (R - 1)x_n} = \frac{10 \cdot 300 \cdot x_n}{300 + 9 \cdot x_n}$$

για θετικές σταθερές R και K με $R > 1$.

Έστω $\{x_n\}$ η ακολουθία τιμών πληθυσμού που ορίζεται αναδρομικά από $x_1 = 60$, και για $n \geq 1$, το x_{n+1} δίνεται από το μοντέλο Beverton–Holt με $R = 10$ και $K = 300$.

- (a) Αν $0 < x_n < 300$, να δείξετε ότι $0 < x_{n+1} < 300$. Καταλήξτε ότι $0 < x_n < 300$ για $n \geq 1$.
- (b) Δείξτε ότι η $\{x_n\}$ είναι αύξουσα.
- (c) Δείξτε ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει και βρείτε το όριό της L .

α) Αν $0 < x_n < 300$ τότε:
 $0 < x_n$ $x_n > 0$:

$$x_{n+1} = \frac{10 \cdot 300 \cdot x_n}{\boxed{300 + 9x_n}} > \frac{10 \cdot 300 \cdot 0}{300 + 9 \cdot 0} = 0$$

↳ δεν υπάρχει αρνητικός αριθμός.

• αν $x_n < 300$

$$x_{n+1} = \frac{10 \cdot 300 \cdot x_n}{300 + 9x_n} < \frac{10 \cdot 300 \cdot 300}{300 + 9 \cdot 300} = 300$$

Άρα $0 < x_{n+1} < 300$ για $n \geq 1$

Επίσης, x_n είναι φραγμένη ($0 < x_n < 300$)

b) $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{R \cdot K}{K + (R-1)x_n}}{\frac{x_n}{1}} = \frac{R \cdot K}{K + (R-1)x_n} =$$

$$= \frac{10 \cdot 300}{300 + 9x_n} > \frac{10 \cdot 300}{300 + 9 \cdot 300} = 1$$

→ λοιπόν γτ. $x_n < 300$
οπότε x_n είναι αύξουσα

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$

Η x_n είναι αύξουσα & αρα φραγμένη

$$(x < 300)$$

- Für ω $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$

$$\text{rück} \quad \lim_{n \rightarrow 400} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow 400} x_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R \cdot \boxed{x_n}}{L + (R-1) \boxed{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{x_n}$$

$$\Rightarrow \frac{R \cdot k \cdot L}{k + (R-1) \cdot L} = L$$

$$\Rightarrow R \cdot K \cdot L = L \cdot (K + (R-1) \cdot L)$$

$$\Rightarrow L(k + (2-1) \cdot L) - 2 \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow LK + L^2(R-1) - RK L = 0$$

$$\Rightarrow L^2(R-1) + L(K - RK) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{L \left((R-1) \cdot L + K - RK \right)}_{=0} = 0$$

$L=0$ $\leadsto$ απρ. γτ. x_1 διγερσ
 n n $x_1=60$

$$(R-1)L + K - RK = 0 \Rightarrow L = \frac{R \cdot K - K}{R-1} = K = 300$$

Ask. 6

Δευτέρα, 22 Δεκεμβρίου 2025 12:36 μμ

Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$ με $x \neq 0$.

(a) Να δείξετε ότι $a_{n+1} = \frac{|x|}{n+1} a_n$

(b) Δείξτε ότι η ακολουθία a_n είναι τελικά αυστηρά φθίνουσα.

(c) Δείξτε ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει.

(d) Να βρείτε πότε συγκλίνει.

$$a) \quad a_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^n \cdot |x|}{n! \cdot (n+1)} = \frac{|x|}{n+1} \cdot a_n$$

$$b) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|}{n+1} \cdot a_n}{a_n} = \frac{|x|}{n+1} < 1$$

→ θα πρέπει να ισχύει
για να είναι φθίνουσα
η a_n .

Αυτό ισχύει όταν

$$|x| < n+1 \Rightarrow n > |x| - 1$$

Άρα η ακολουθία είναι

τάξιδα φθίνουσα για $n > |x| - 1$

d) Έστω α_n συγκλίνουσα στο L
τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = L$$

είν ισχύει αυτό τότε ισχύει
και το αντίστροφο:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} \boxed{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{n+1} \cdot L = L$$

$$\Rightarrow |x| \cdot L = L \cdot (n+1)$$

$$\Rightarrow L \cdot (n+1) - L \cdot |x| = 0$$

$$\Rightarrow L \cdot (n+1 - |x|) = 0$$

$$\Rightarrow L = 0$$

in

$$n+1 - |x| = 0 \Rightarrow |x| = n+1$$

↳ απορ. από b)
επειδή
 $|x| > n+1$

$$\text{Άρα } L = 0$$

οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

c). Γνωρίζουμε από b) ότι,

c). Υποτίθεται με από b) ότι,

a_n είναι τελικά φθίνουσα.
Επίσης

$$a_n = \frac{|x|^n}{n!} \quad \mu \in \quad x \neq 0$$

όπου $n!$ είναι πάντα > 0 .

$|x|^n$ είναι πάντα > 0 .

Αρα $a_n > 0$ πάντα.

τότε a_n κάτω φραγμένη.

Από θεωρία αφαί a_n κάτω φραγμένη
κ' φθίνουσα, a_n συγκλίνει.

Ask. 7

Δευτέρα, 22 Δεκεμβρίου 2025 1:09 μμ

Βρείτε όλες τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά και βρείτε το άθροισμα της σειράς για αυτές τις τιμές του x .

a) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \dots$

b) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{8}{x^5} + \frac{16}{x^6} + \dots$

c) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \dots$

$$\text{Τελική σειρά} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot f^n = x \cdot f^0 + x \cdot f^1 + x \cdot f^2 + \dots$$

a) $x \cdot (-x^2)^0 + x \cdot (-x^2)^1 + x \cdot (-x^2)^2 + \dots$

οπότε $x = x, f = -x^2$

Η σειρά συγκλίνει για $|f| < 1 \Rightarrow |-x^2| < 1$

$\Rightarrow |x| < 1$

$\Rightarrow S = \frac{x}{1-f} = \frac{x}{1-(-x^2)} = \frac{x}{1+x^2}$

b) $\frac{1}{x^2} ()^0 + \frac{1}{x^2} ()^1 + \frac{1}{x^2} ()^2 + \dots$

Τελωμ. στην $\mu \in \alpha = \frac{1}{x^2}, g = \frac{2}{x}$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = g \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = g \Rightarrow \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = g$$

$$\Rightarrow g = \frac{2}{x}$$

Η στην συγκλίνει για $|g| = \left| \frac{2}{x} \right| < 1$

$$\Rightarrow |x| > 2$$

$$S = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

c) $e^{-x} (e^x)^0 + e^{-x} (e^{-x})' + e^{-x} (e^{-x})^2 + \dots$

Τελωμ. στην $\mu \in \alpha = e^{-x}, g = e^{-x}$

οπότε $g = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}} = e^{-x}$

$$\text{όπου } g = \frac{d_1}{d_0} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = e^{-x}$$

Η σειρά συγκλίνει για $|e^{-x}| < 1$

$$\Rightarrow e^{-x} < 1$$

$$\Rightarrow \ln e^{-x} < \ln 1$$

$$\Rightarrow -x \ln e < 0$$

$$\Rightarrow -x < 0$$

$$\Rightarrow x > 0$$

$$S = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x + 1}$$

Ask. 8

Δευτέρα, 22 Δεκεμβρίου 2025 1:24 μμ

Να δείξετε ότι:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots = \frac{3}{4}$$

$$d) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k} \cancel{\sqrt{k+1}}} - \frac{\cancel{\sqrt{k}}}{\cancel{\sqrt{k}} \sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \leadsto \text{Τηλ. καταστροφ. σειρά}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \quad \text{Τηλ. ΕΟΚ. σε κ. α.}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} \right) +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{7} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$$

$$= \frac{A(k+2)}{k(k+2)} + \frac{B \cdot k}{k(k+2)}$$

$$= \frac{(A+B)k + 2A}{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)k + 2A$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Αρ α

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2} =$$

$$k=1 \quad \dots \quad k-1 \quad \dots$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

→ Τηλεοκ. σειρά
Διτκ b) για
Σύση

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$d) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

Τηλεοκ. σειρά

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Αρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{2k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{2k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)-1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Ask. 9

Δευτέρα, 22 Δεκεμβρίου 2025 1:43 μμ

Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου για να προσδιορίσετε εάν η σειρές συγκλίνουν:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{k!}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!10^k}{3^k}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{50} e^{-k}$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{e^k}$

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

$$\alpha) \alpha_k = \frac{7^k}{k!}$$

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\frac{7^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{7^k}{k!}} = \frac{7^{k+1} \cdot k!}{7^k \cdot (k+1)!}$$

$$= \frac{\cancel{7^k} \cdot 7 \cdot \cancel{k!}}{\cancel{7^k} \cdot \cancel{k!} (k+1)} = \frac{7}{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{7}{k+1} = 0. \quad \text{Άρα μοιρά συγκλίνει στο } \mathbb{R}$$

Ask. 10

Δευτέρα, 22 Δεκεμβρίου 2025 1:48 μμ

11. Να βρεθεί το τρίτου βαθμού πολυώνυμο Maclaurin της

$$f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$$

$$\longrightarrow x_0 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2 - 2x + 3x^2$$

$$\text{οπότε } f'(0) = 2$$

$$f''(x) = -2 + 6x$$

$$\text{οπότε } f''(0) = -2$$

$$f'''(x) = 6$$

$$\text{οπότε } f'''(0) = 6$$

$$P_3 = 1 + \frac{2}{1!} \cdot x + \frac{-2}{2!} x^2 + \frac{6}{3!} x^3$$

$$= 1 + 2x - x^2 + x^3 = \boxed{f(x)}$$

Ask. 11

Δευτέρα, 22 Δεκεμβρίου 2025 1:52 μμ

12. Να βρεθεί το τρίτου βαθμού πολυώνυμο Taylor στο $x = 1$ της

$$f(x) = 1 + 2(x - 1) - (x - 1)^2 + (x - 1)^3$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = 2 - 2(x - 1) + 3(x - 1)^2$$

$$f'(1) = 2$$

$$f''(x) = -2 + 6(x - 1)$$

$$f''(1) = -2$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(1) = 6$$

$$P_3 = 1 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$

$$= \dots = \boxed{f(x)}$$