

Πολυώνυμα Maclaurin και Taylor - Κεφάλαιο VI

Υπενθυμίζετε από την παραγωγή συνάρτησης ότι η γραμμική προσέγγιση μίας συνάρτησης f στο σημείο a υπολογίζεται μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γραφτεί σαν 1^{ου} βαθμού πολυώνυμο ως ακολούθως:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Η τετραγωνική προσέγγιση μίας συνάρτησης f στο σημείο x_0 υπολογίζεται μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γραφτεί σαν 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο ως ακολούθως:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$, να βρεθεί η γραμμική και τετραγωνική προσέγγισή της στο σημείο $a = 0$. Βρίσκουμε ότι $f'(a) = f''(a) = e^x$ και $f'(0) = f''(0) = e^0 = 1$.

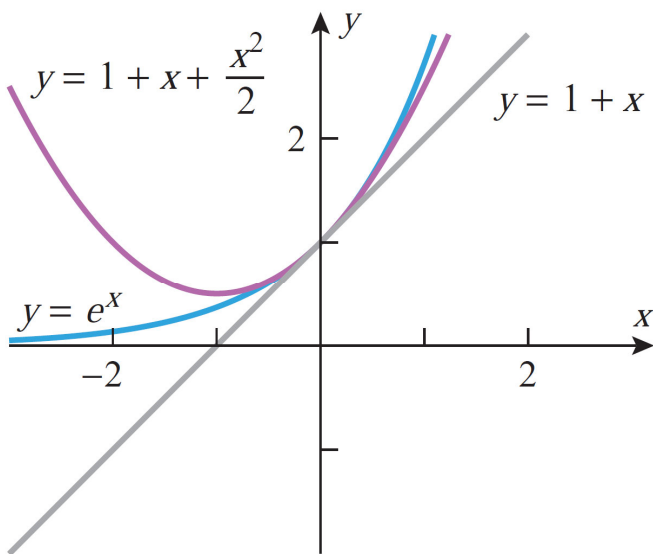
Η γραμμική προσέγγιση της f στο $x_0 = 0$ είναι

$$e^x \simeq 1 + x$$

Και η τετραγωνική προσέγγιση της f στο σημείο $x_0 = 0$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Η γραφική τους αναπαράσταση δείχνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Πολυώνυμο Maclaurin και Taylor

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει μέχρι και $n + 1$ τάξης παραγώγους, τότε ορίζουμε το n -οστού βαθμού **πολυώνυμο Taylor** για την f στο $x = a$ να είναι:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (4)$$

Σημείωση: Το πολυώνυμο Taylor μπορεί να γραφτεί σε μορφή αθροίσματος ως ακολούθως:

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Το πολυώνυμο αυτό έχει την ίδια τιμή με τη συνάρτηση και τις παραγώγους της στο σημείο a . Είναι λοιπόν πολύ λογικό «κοντά» στο a οι τιμές του πολυωνύμου $p_n(x)$ που κατασκευάσαμε να προσεγγίζουν τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης. Αν δηλαδή $x = a + h$, τότε $f(a+h) \approx p_n(a+h)$ και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε, παρατηρώντας ότι $x - a = h$, ότι:

$$\begin{aligned} f(a+h) \\ \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n \end{aligned} \quad (5)$$

Έχει επιτευχθεί κάτι πολύ σημαντικό. Τόσο, ώστε τα πολυώνυμα που εμφανίζονται στο δεύτερο μέλος των (4) και (5) και τα οποία προσεγγίζουν την συνάρτηση, να ονομάζονται *πολυώνυμα Taylor*.

Δηλαδή, οι τιμές $f(x)$ σε μια περιοχή του a μπορεί να προσεγγιστούν από το n -οστού βαθμού πολυώνυμο Taylor:

$$f(x) \simeq p_n(x)$$

Σημείωση: Αν η συνάρτηση f αναπτύσσεται γύρω από το σημείο $a = 0$ τότε το $p_n(x)$ αναφέρεται ως **πολυώνυμο Maclaurin**.

Καθώς όμως η τιμή που υπολογίσαμε δεν ταυτίζεται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο $x = a + h$, έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε το λάθος ή αλλιώς το *σφάλμα* που κάνουμε όταν προσεγγίζουμε μια συνάρτηση με ένα πολυώνυμο Taylor. Το σφάλμα αυτό προφανώς είναι ίσο με τη διαφορά μεταξύ της τιμής της συνάρτησης $f(x)$ και της τιμής του πολυωνύμου Taylor $p_n(x)$ που κατασκευάστηκε για να την προσεγγίσει. Αν λοιπόν παραστήσουμε με $R_n(x)$ την διαφορά αυτή, τότε

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

και επομένως

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

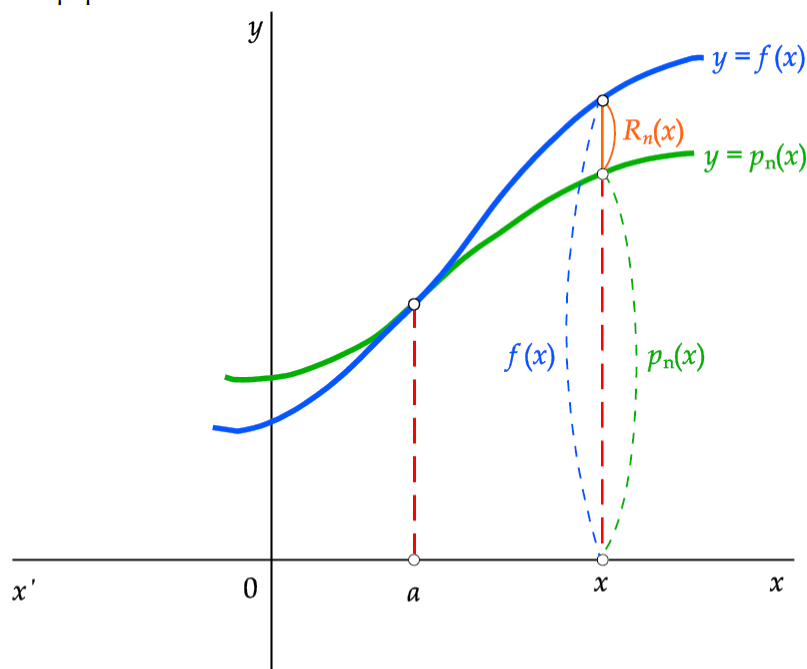
ή αντικαθιστώντας το $p_n(x)$ με την έκφραση που έχει αυτό στον τύπο (4) λαμβάνουμε την παρακάτω αναπτυγμένη μορφή για την συνάρτηση:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (6)$$

ή χρησιμοποιώντας το σύμβολο της άθροισης:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (7)$$

Αυτός είναι ο τύπος που ονομάζεται *τύπος του Taylor*. Η ποσότητα $R_n(x)$ ονομάζεται *υπόλοιπο* και στο σχήμα που ακολουθεί την έχουμε αποδώσει γραφικά για να γίνει και εποπτικά κατανοητή.



Σχήμα 9

Παρατήρηση 6.1. Είναι προφανές ότι το υπόλοιπο εξαρτάται από το σημείο a στο οποίο κατασκευάζεται το πολυώνυμο Taylor. Για διαφορετικά $a, b \in [x_1, x_2]$ θα έχουμε διαφορετικά πολυώνυμα και προφανώς διαφορετικά υπόλοιπα. Όταν είναι αναγκαίο να το συμβολίσουμε αυτό, προκειμένου να μην υπάρχει σύγχυση, γράφουμε $p_{n,a}(x)$ για το πολυώνυμο Taylor βαθμού n στο σημείο $x = a$ και $R_{n,a}(x)$ για το αντίστοιχο υπόλοιπο. □

Όταν ο τύπος του Taylor εφαρμόζεται στη θέση $a = 0$, παίρνει το όνομα *τύπος του Maclaurin*, από τον Σκωτσέζο μαθηματικό Colin Maclaurin (Κόλιν Μακλόριν, 1698-1746), ο οποίος έκανε εκτεταμένη χρήση αυτής της ειδικής περίπτωσης στο βιβλίο του *Treatise of Fluxions*, το 1742. Φαίνεται όμως ότι η ειδική αυτή μορφή του τύπου πρωτοεμφανίστηκε 25 χρόνια νωρίτερα, το 1717, στο έργο *Lineae tertii ordinis Newtonianae* του επίσης Σκωτσέζου μαθηματικού James Stirling (1692-1770). Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι τρεις αυτοί μαθηματικοί, Taylor, Maclaurin, και Stirling είχαν στενές σχέσεις με τον Νεύτωνα, εμπνεύστηκαν από το έργο του, και λίγο-πολύ ενεπλάκησαν στην διαμάχη της προτεραιότητας μεταξύ του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς για τον διαφορικό λογισμό.

Ας επιστρέψουμε όμως στο υπόλοιπο $R_n(x)$ του τύπου του Taylor. Ο Lagrange, ο οποίος, όπως είπαμε, ήταν αυτός που ανέδειξε την σπουδαιότητα του τύπου του Taylor, απέδειξε ότι

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (8)$$

όπου ξ είναι ένας αριθμός μεταξύ των a και x . Έτσι ο τύπος του Taylor παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (9)$$

Παρ' όλο που το υπόλοιπο στον τύπο (8) μοιάζει με τους άλλους όρους του πολυωνύμου, δεν θα πρέπει να μας διαφεύγει ότι η παράγωγος $f^{(n+1)}$ δεν παίρνεται στο a , αλλά σε ένα σημείο ξ μεταξύ του a και του x .

Θεώρημα 6.1. Έστω ότι μια πραγματική συνάρτηση φορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[x_1, x_2]$ έχει μέχρι $n+1$ τάξης παράγωγο. Αν $a \in [x_1, x_2]$, τότε για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

i. υπάρχει ξ μεταξύ των a και x τέτοιο ώστε

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a)$$

(μορφή Cauchy του υπολοίπου του Taylor)

ii. υπάρχει ξ μεταξύ των a και x τέτοιο ώστε

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

(μορφή Lagrange του υπολοίπου του Taylor)

Η εμφάνιση του αγνώστου αριθμού ξ κάνει πολλές φορές ακατάλληλο τον τύπο (9) για τις πρακτικές εφαρμογές και γι' αυτό έγιναν προσπάθειες για την εύρεση άλλων μορφών υπολοίπου, περισσότερο εύχρηστων στις εφαρμογές. Θα παρουσιάσουμε μια άλλη μορφή του τύπου, η οποία προκύπτει αν θεωρήσουμε τη διαφορά:

$$E(x) = f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(a)$$

Τότε ο τύπος (8) λαμβάνει τη μορφή:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} [f^{(n+1)}(a) + E(x)]$$

Η μορφή αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν ξέρουμε ότι η $f^{(n+1)}(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο a , γιατί τότε το $E(x)$ λαμβάνει μικρές τιμές όταν το πλησιάζει κοντά στο a . Πράγματι, επειδή η $f^{(n+1)}(x)$ είναι συνεχής, αν ε είναι ένας δοσμένος θετικός αριθμός, θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε:

$$|f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(a)| < \varepsilon \text{ όταν } 0 < |x - a| < \delta.$$

Αν λοιπόν το σημείο x στον τύπο (9) βρίσκεται σε απόσταση από το σημείο a μικρότερη ή ίση του δ , τότε και το σημείο ξ που βρίσκεται μεταξύ a και x θα βρίσκεται επίσης σε απόσταση μικρότερη ή ίση του δ από το a και επομένως $|E(x)| < \varepsilon$, δηλαδή $E(x) \rightarrow 0$ καθώς $x \rightarrow a$. Επομένως, όταν η $f^{(n+1)}(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο a , ο τύπος του Taylor μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{E(x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (10)$$

με $E(x) \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow a$.

Online γραφική απεικόνιση πολυωνύμων Maclaurin και Taylor

<https://demonstrations.wolfram.com/GraphsOfTaylorPolynomials/>

► **Παράδειγμα 6.1.** Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = e^x$ και ας εφαρμόσουμε τον τύπο του Taylor στη θέση $a = 0$, δηλαδή τον τύπο του Maclaurin. Βρίσκουμε τις παραγώγους της συνάρτησης και την τιμή τους στην θέση 0. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x, & f''(0) &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= e^x, & f^{(n)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στον τύπο (9) έχουμε:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi \quad (11)$$

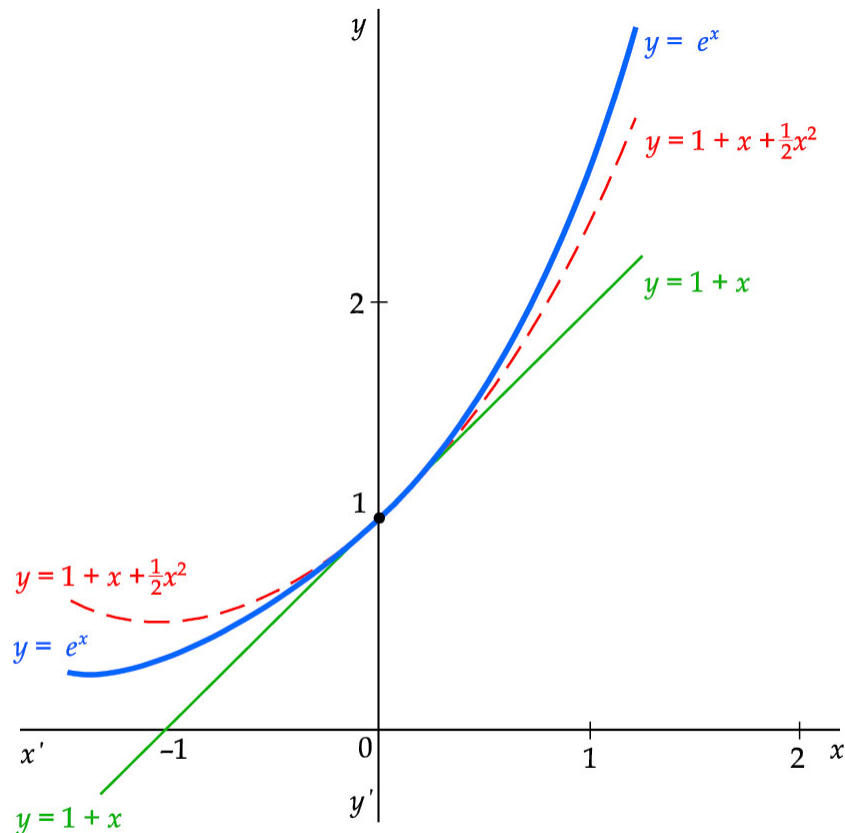
όπου το ξ βρίσκεται μεταξύ του 0 και του x . Ο τύπος αυτός αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και για όλους τους θετικούς ακέραιους n . Ο ξ εξαρτάται και από τον x και από τον n . Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά αυτόν τον τύπο που φτιάξαμε για την e^x . Αν $n = 1$ και περιορισθούμε στο αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor, τότε έχουμε κατασκευάσει το γραμμικό πολυώνυμο

$$p_1(x) = 1 + x$$

το οποίο έχει την ίδια τιμή με την συνάρτηση και την πρώτη παράγωγό της στο 0. Αυτό σημαίνει γεωμετρικά ότι η γραφική παράσταση του $p_1(x)$ είναι η εφαπτομένη στο γράφημα της e^x στο σημείο (0,1). Ας προσεγγίσουμε τώρα την e^x με το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που προκύπτει όταν $n = 2$, και είναι το

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Το πολυώνυμο αυτό έχει την ίδια τιμή με την συνάρτηση και τις δύο πρώτες παραγώγους της στο 0. Δηλαδή η γραφική παράσταση του $p_2(x)$ έχει όχι μόνον την ίδια εφαπτομένη αλλά και την ίδια καμπυλότητα με την e^x στο σημείο (0,1). Επομένως το $p_2(x)$ δίνει μια καλύτερη προσέγγιση της e^x στο (0,1) από την προηγούμενη γραμμική. Τις προσεγγίσεις αυτές δείχνει το σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 10

Η ακρίβεια της προσέγγισης βελτιώνεται ακόμη περισσότερο με το $p_3(x)$ και ούτω καθεξής.

► **Παράδειγμα 6.2.** Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ και ας εφαρμόσουμε τον τύπο του Taylor στη θέση $a = 0$. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0 \\
 f'(x) &= \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right), & f'(0) &= 1 \\
 f''(x) &= -\sin x = \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x\right), & f''(0) &= 0 \\
 f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right), & f'''(0) &= -1 \\
 f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin\left(4\frac{\pi}{2} + x\right), & f^{(4)}(0) &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 f^{(n)}(x) &= \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right), & f^{(n)}(0) &= \sin n\frac{\pi}{2} \\
 f^{(n+1)}(x) &= \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2} + x\right], & f^{(n+1)}(\xi) &= \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στον τύπο (9) έχουμε:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]$$

Ας σχολιάσουμε λίγο το υπόλοιπο

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin \left[(n+1) \frac{\pi}{2} + \xi \right]$$

που παρουσιάζεται στον τύπο αυτό. Καθώς το ημίτονο βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα $[-1,1]$ έχουμε ότι

$$\left| \sin \left[(n+1) \frac{\pi}{2} + \xi \right] \right| \leq 1$$

Συνεπώς συνάγουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο του ημιτόνου που φτιάξαμε για ένα πρακτικό σκοπό: Για να υπολογίσουμε το ημίτονο των 20° , δηλαδή το $\sin \frac{\pi}{9}$. Θα αρκεστούμε να τον εφαρμόσουμε για $n = 3$. Έτσι έχουμε:

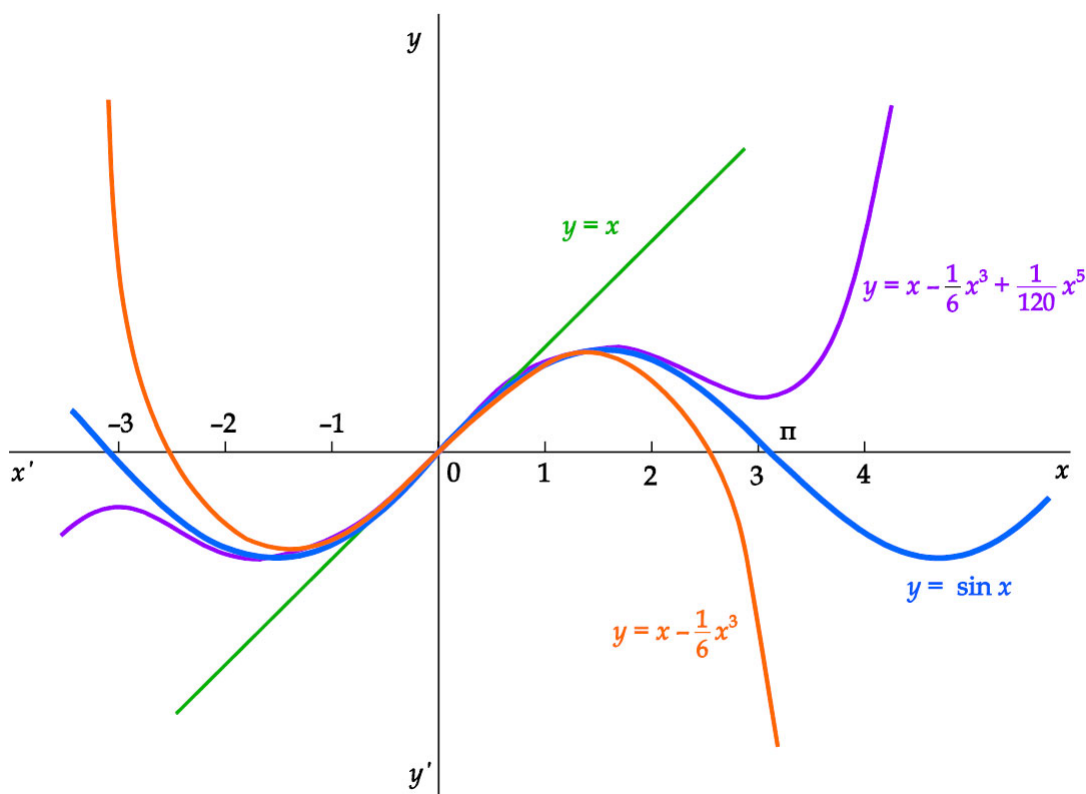
$$\sin \frac{\pi}{9} = p_3(x) + R_3(x) = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 + \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \sin(2\pi + \xi)$$

Επομένως:

$$\sin \frac{\pi}{9} \approx p_3(x) = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 \approx 0.342$$

Να εκτιμήσουμε τώρα το σφάλμα του υπολογισμού που κάναμε χρησιμοποιώντας το $p_3(x)$. Αυτό είναι ίσο με το υπόλοιπο:

$$R_3(x) = \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \sin(2\pi + \xi)$$



Σχήμα 11

Για το $R_3(x)$ όμως έχουμε:

$$|R_3(x)| = \left| \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \sin(2\pi + \xi) \right| \leq \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \approx 0.00062 < 0.001$$

Συνεπώς με σφάλμα μικρότερο από 0.001 το ημίτονο των 20° είναι 0.342.

Στο σχήμα - 11 έχουμε σχεδιάσει το γράφημα του ημιτόνου και των τριών πρώτων προσεγγίσεών του με τα πολυώνυμα του Taylor. Μπορείτε να διαπιστώσετε πως βελτιώνεται η προσέγγιση καθώς αυξάνεται ο βαθμός των πολυωνύμων. ◀

$$\bullet f(x) = e^x, \quad \alpha = 0, \quad f(\alpha) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(\alpha) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x, \quad f''(\alpha) = e^0 = 1$$

Η γραμμική προσέγγιση της $f(x)$ στο

$x_0 = 0$ είναι:

$$f(x) \simeq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$\Rightarrow e^x \simeq 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x$$

Η τετραγωνική προσέγγιση στο $x_0 = 0$ είναι:

$$f(x) \simeq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2} (x - \alpha)^2$$

$$\Rightarrow e^x \simeq 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2} (x - 0)^2$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

- $f(x) = \sin x$, Taylor για $x=0, f(0)=0$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(4\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left((n+1) \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(n+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (9) έχουμε:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} (x-0) + \frac{0}{2!} (x-0)^2 + \frac{-1}{3!} (x-0)^3 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n!} (x-0)^n + \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \\
 & = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$R_n(x) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Επειδή $\sin x \in [-1, 1]$ έχουμε

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq 1$$

Λοιπόν $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

Σειρές Maclaurin και Taylor - Κεφάλαιο VI

Σειρές Taylor

Είδαμε στα παραπάνω παραδείγματα πως βελτιώνεται η προσέγγιση καθώς μεγαλώνει ο βαθμός των πολυωνύμων. Επειδή όμως τα πολυώνυμα του Taylor εξαρτώνται από τις παραγώγους της συνάρτησης που προσεγγίζουν, μπορούμε να αυξάνουμε τον βαθμό τους αυξάνοντας την τάξη των παραγώγων της συνάρτησης, εφόσον αυτές υπάρχουν. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μια συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγωγο κάθε τάξης. Μπορούμε τότε να την προσεγγίσουμε με οποιουδήποτε βαθμού πολυώνυμο. Αν επιπλέον συμβεί το υπόλοιπο $R_n(x)$ να τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο ∞ , τότε το πολυώνυμο του Taylor θα τείνει να ταυτιστεί με την συνάρτηση. Δηλαδή αν $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$. Το όριο στο οποίο τείνει το πολυώνυμο Taylor ονομάζεται *σειρά Taylor* της $f(x)$. Δηλαδή η σειρά Taylor της $f(x)$ στο σημείο a είναι η:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$$

όπου ξ σημείο μεταξύ των x και a .

Αν $a = 0$, τότε η σειρά ονομάζεται και *σειρά Maclaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

► **Παράδειγμα 6.3.** Στηριζόμενοι στους υπολογισμούς και την ανάλυση που κάναμε στα παραδείγματα 6.1 και 6.2, μπορούμε να πούμε ότι η σειρά Maclaurin (σειρά Taylor στο σημείο $a = 0$) για την συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι η:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

και η σειρά Maclaurin (σειρά Taylor στο σημείο $a = 0$) για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι η:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin n \frac{\pi}{2} + \dots$$

ή αν θέλουμε να απαλείψουμε το ημίτονο από την σειρά, αντικαθιστούμε την συνεισφορά του σε αυτήν με την συμπεριφορά των δυνάμεων του -1 , και διατηρώντας μόνον τους περιττής τάξης όρους έχουμε:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Επιπλέον αν, για παράδειγμα, θέλουμε να γράψουμε την σειρά Taylor στο σημείο a , για την συνάρτηση $f(x) = e^x$, τότε εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε ότι αυτή είναι η:

$$e^x = e^a \left[1 + \frac{(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} + \dots \right] \quad \blacktriangleleft$$

Ανακεφαλαιώνοντας,

για να αναπτύξουμε μια συνάρτηση σε σειρά Taylor εργαζόμαστε ως εξής:

- i. Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης, την δεύτερη παράγωγο αυτής, την τρίτη, κ.ο.κ την νιοστή παράγωγο.
- ii. Βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησης για $x = a$ (όπου a η τιμή που μας δίνουν), την τιμή της πρώτης παραγώγου για $x = a$, της δευτέρας για $x = a$, της τρίτης κ.ο.κ. της νιοστής για $x = a$.
- iii. Θέτουμε τις τιμές αυτές στον τύπο

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

και έχουμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης σε σειρά Taylor.

Αν $a = 0$, ο τύπος λαμβάνει την μορφή

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

ο οποίος μας δίνει το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε σειρά Maclaurin.

Λέμε ότι στη σειρά Taylor έχουμε το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης κατά τις δυνάμεις του $x - a$, ενώ στη σειρά Maclaurin κατά τις δυνάμεις του x .

Λοιμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 6.1.** Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x η συνάρτηση

$$f(x) = \cos x$$

Λύση. Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης και των παραγώγων της στο σημείο $x = 0$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) = \cos x, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(2\frac{\pi}{2} + x\right), \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(3\frac{\pi}{2} + x\right), \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x = \cos\left(4\frac{\pi}{2} + x\right), \quad f^{(4)}(0) = 1$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + x\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2}$$

Επομένως η σειρά Maclaurin για την συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι η:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cos n\frac{\pi}{2} + \dots$$

ή αν θέλουμε να απαλείψουμε το συνημίτονο από την σειρά, αντικαθιστούμε την συνεισφορά του σε αυτήν με την συμπεριφορά των δυνάμεων του -1 , κρατώντας μόνον τους άρτιους τάξεως όρους, έτσι έχουμε:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} (-1)^n + \dots \blacktriangleleft$$

► **Άσκηση 6.2.** Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x η συνάρτηση

$$f(x) = \cos 3x$$

Λύση. Έχοντας ήδη υπολογίσει την σειρά του $\cos x$ στην προηγούμενη άσκηση, θέτουμε όπου x το $3x$ και έχουμε:

$$\cos 3x = 1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \dots + \frac{3^{2n} x^{2n}}{2n!} (-1)^n + \dots$$

Γενικότερα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη σειρά του $\cos kx$, τότε αυτή προκύπτει από την σειρά του $\cos x$ αρκεί να θέσουμε το kx στη θέση του x . ◀

► **Άσκηση 6.3.** Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x η συνάρτηση

$$f(x) = \sin 3x$$

Λύση. Έχουμε ήδη υπολογίσει την σειρά του $\sin x$ στην θεωρία μας, η οποία είναι η:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots$$

Στη σειρά αυτή θέτουμε όπου x το $3x$ και έχουμε:

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots \quad \blacktriangleleft$$

$$f(x) = e^x \quad \text{στο } x=0$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{στο } x=0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \dots$$

$$\bullet \quad f(x) = \cos x, \quad x=0, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x = \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Επομένως η σειρά development της $f(x)$
 είναι :

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 + \frac{0}{1!} (x-0) + \frac{-1}{2!} (x-0)^2 + \\ &+ \frac{0}{3!} (x-0)^3 + \frac{1}{4!} (x-0)^4 + \\ &+ \dots + \frac{\cos(n \frac{\pi}{2})}{n!} (x-0)^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \boxed{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \dots \\ &\dots + \frac{x^{2n}}{2n!} \boxed{\cos(n\pi)} \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad (-1)^n \end{aligned}$$

• $f(x) = \cos 3x$

$$\cos 3x = 1 - \frac{3^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{3^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{3^6 \cdot x^6}{6!} + \dots + \frac{3^{2n} \cdot x^{2n}}{2n!} (-1)^n$$