

# Μαθηματικά Ι (Φροντιστήριο)

Σημειώσεις Διαλέξεων

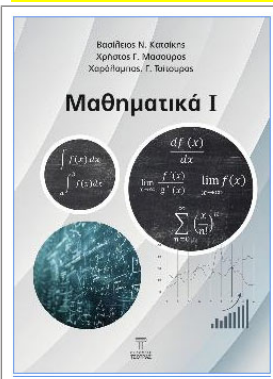
Διδάσκων: Σπυρίδων Δ. Μουρτάς

eClass ΕΚΠΑ: ECON299

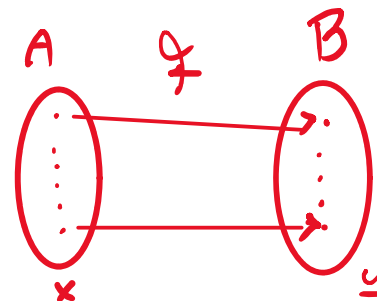
**Σύγγραμμα:** Μαθηματικά Ι, Β.Ν. Κατσίκης, Χ. Μασούρος,  
Χ. Τσίτουρας, 2024, 1η έκδοση,  
Εκδόσεις Τσότρας, ISBN: 978-618-217-082-3

**Link:** <https://service.eudoxus.gr/search/#s/κατσίκης/0>

**Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 133032874**

|                                                                                     |                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <ul style="list-style-type: none"><li>• Κεφάλαιο VI, Παράγραφος 6</li><li>• Κεφάλαιο VII, Παράγραφοι 1-14</li><li>• Κεφάλαιο XVI, Παράγραφοι 1,2,4,5</li><li>• Κεφάλαιο XVII, Παράγραφοι 1,2</li></ul> |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

# Ακολουθίες - Κεφάλαιο VII



## 1. Πραγματικές συναρτήσεις

**Συνάρτηση**  $f$  από ένα μη κενό σύνολο  $A$  σε ένα μη κενό σύνολο  $B$  λέγεται μια σχέση με την οποία κάθε στοιχείο  $x$  του συνόλου  $A$  αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο  $y$  του συνόλου  $B$ , και συμβολίζεται

$$f: A \rightarrow B \text{ ή } y = f(x)$$

Εάν τα σύνολα  $A$  και  $B$  είναι υποσύνολα του συνόλου  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών ( $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ) τότε η  $f$  θα ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση** και ισχύει:

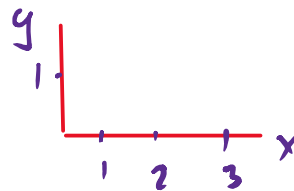
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Το στοιχείο  $x$  ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ή πρότυπο και το στοιχείο  $y$ , που αντιστοιχεί στο  $x$ , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** ή εικόνα του  $x$  και συμβολίζεται ως  $f(x)$ .

Το σύνολο  $A$  όλων των  $x$  ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της  $f$  και θα το συμβολίζουμε  $D(f)$ . Το σύνολο  $B$  όλων των εικόνων  $f(x)$  ονομάζεται **πεδίο τιμών** της  $f$  και θα το συμβολίζουμε  $R(f)$ .

### Βασικές μαθηματικές συναρτήσεις

2. Σταθερή:  $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
3. Γραμμική (Ευθεία):  $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$
4. Τετραγωνική (Πολύωνυμο 2ου βαθμού):  $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}$
5. Ομογραφική:  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$
6. Πολυωνυμικές:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
7. Ρητές:  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x)$  πολύωνυμα πεπερασμένου βαθμού
8. Εκθετική:  $f(x) = a^x, a > 0$
9. Λογαριθμική:  $f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1$
10. Τριγωνομετρικές:  $f(x) = \eta \mu x, f(x) = \sigma \upsilon \nu x, f(x) = \epsilon \phi x$



## 2. Ακολουθίες

ζώνο 90  $\rightarrow \{ \dots \}$

**Ακολουθία** ονομάζεται μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  και σύνολο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ . Δηλαδή, χαρακτηρίζουμε **ακολουθία** κάθε συνάρτηση της μορφής

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Οι ακολουθίες συμβολίζονται με μικρά γράμματα, π.χ.  $a$ . Η **εικόνα** του αριθμού  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a(n)$ , ονομάζεται  $n$ -οστός όρος της ακολουθίας και συνήθως συμβολίζεται  $a_n$  ή  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  ή  $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ .

Ο  $a_{n+1}$  ονομάζεται **επόμενος** του  $a_n$  και ο  $a_n$  **προηγούμενος** του  $a_{n+1}$ .

ζώνο 90

Οι ακολουθίες μπορούν να αναπαρασταθούν

- δι' αναγραφής, π.χ.  $\rightarrow 2, 4, 6, 8, \dots$
- ή δι' ενός γενικού τύπου,  $a_n = n+2$
- ή με μία αναδρομική σχέση όπου θα πρέπει να δίνονται οι **αρχικές τιμές** των πρώτων όρων της ακολουθίας.

Πράξεις μεταξύ ακολουθιών:

- Ισότητα
- Άθροισμα
- Διαφορά
- Γινόμενο
- Πηλίκο
- Γινόμενο πραγματικού αριθμού με ακολουθία
- Τετραγωνική ρίζα της ακολουθίας

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 2n \\ b_n = n+1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n + b_n = 2n + n + 1 \\ = 3n + 1 \end{array}$$

► **Παράδειγμα 2.1.** Να βρείτε έναν γενικό όρο, με βάση τους πρώτους όρους που δίνονται, για τις παρακάτω ακολουθίες:

α)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$     β)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$     γ)  $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$     δ)  $1, 3, 5, 7, \dots$  ,  $2^M - 1$

Για την περίπτωση α) παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής κάθε κλάσματος είναι μεγαλύτερος κατά μια μονάδα από τον αριθμητή, επομένως η ακολουθία θα είναι:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$

και  $f(n) = \frac{n}{n+1}$ .

Για την περίπτωση β) παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής κάθε κλάσματος είναι δύναμη του δύο, επομένως η ακολουθία θα είναι:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

και  $f(n) = \frac{1}{2^n}$ .

Για την περίπτωση γ) παρατηρούμε ότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο αν προσθέσουμε τον αριθμό +2, επομένως, η ακολουθία θα είναι:

$$1, 3, 5, 7, \dots, n+2, \dots$$

και  $f(n) = n+2$ .

ο γενικός τύπος  
 $\rightarrow a_n = 2^M - 1$

Όταν σε μια ακολουθία:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

είναι γνωστός ο γενικός όρος, τότε δεν είναι απαραίτητο να γράψουμε τους πρώτους όρους και συνηθίζεται να γράφουμε τον γενικό όρο μέσα σε άγκιστρα, δηλαδή

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ή απλά } \{a_n\}$$

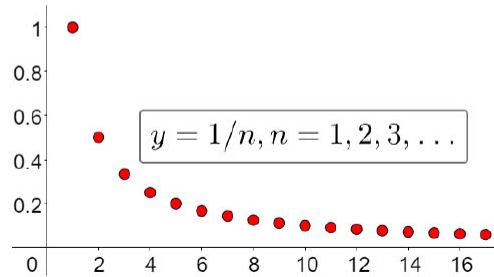
Για παράδειγμα, την ακολουθία του α) ερωτήματος του προηγούμενου παραδείγματος θα μπορούσαμε να την γράψουμε ως  $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ . Να σημειώσουμε εδώ ότι δεν είναι απαραίτητο σε μια ακολουθία ο δείκτης της (δηλαδή το  $n$ ) να ξεκινά από την τιμή 1, σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να ξεκινά από το μηδέν ή από οποιονδήποτε άλλον φυσικό αριθμό. Δείτε για παράδειγμα την ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$$

Θα μπορούσαμε να την περιγράψουμε με δυο τρόπους, είτε ως  $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$  στην οποία ο δείκτης αρχίζει από το μηδέν, είτε ως  $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$  στην οποία ο δείκτης αρχίζει από το ένα.

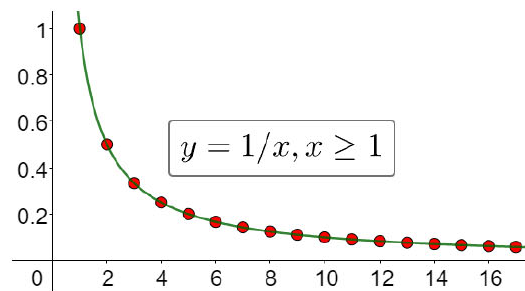
### 3. Γραφική παράσταση μιας ακολουθίας

Αφού οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις, έχει νόημα να μιλάμε για την γραφική τους παράσταση. Ας δούμε για παράδειγμα την ακολουθία  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ , τότε η γραφική της παράσταση είναι τα σημεία  $(x, y) \equiv \left(n, \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots$ , βλέπε σχήμα 1.



Σχήμα 1

Προσοχή στη διαφορά της παραπάνω γραφικής παράστασης από την γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης, δηλαδή της  $y = \frac{1}{x}, x \geq 1$ , η οποία είναι μια συνεχόμενη καμπύλη όπως στο σχήμα 2.



Σχήμα 2

# Ask. 1

Δευτέρα, 5 Οκτωβρίου 2026 1:02 μμ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(a)  $f(x) = x^3$

(b)  $\frac{1}{(x-1)(x-3)}$

(c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

a) π.ο.  $\mathbb{R}$

b)  $(x-1) \cdot (x-3) \neq 0$

π.ο.  $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$   
 $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

c)  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$\rho_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ & \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \\ & \rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} \end{aligned}$$

$$(x-3)(x-2) \geq 0$$

| x    | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
|------|-----------|---|---|-----------|
| f(x) | +         | - | + |           |

π.ο.  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

## Ask. 4

Δευτέρα, 5 Οκτωβρίου 2026 1:50 μμ

1. Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους της ακολουθίας:

(a)  $\{1 + (-1)^n\}_{n=0}^{+\infty}$

(b)  $\{n^2 + 2\}_{n=0}^{+\infty}$

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \alpha_0 &= 1 + (-1)^0 = 2 \\ \alpha_1 &= 1 + (-1)^1 = 0 \\ \alpha_2 &= 1 + (-1)^2 = 2 \\ \alpha_3 &= 1 + (-1)^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \alpha_0 &= 0^2 + 2 = 2 \\ \alpha_1 &= 1^2 + 2 = 3 \\ \alpha_2 &= 2^2 + 2 = 6 \\ \alpha_3 &= 3^2 + 2 = 11 \end{aligned}$$

## Ask. 5

Δευτέρα, 5 Οκτωβρίου 2026 1:58 μμ

1. Αν  $a_0 = 5$ , να βρεθεί ο πέμπτος όρος της ακολουθίας:  $a_n = a_{n-1} - 1$

$$a_0 = 5$$

$$a_1 = 5 - 1 = 4$$

$$a_2 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 3 - 1 = 2$$

$$a_4 = 2 - 1 = 1$$

$$a_5 = 1 - 1 = 0$$