Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Μαθηματικά Ι, 15 Φεβρουαρίου 2019.

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο:

Να βρεθεί η αύξηση Δy, το διαφορικό dy και η διαφορά $\Delta y - dy$ της συνάρτησης $y = x^3 + 3x$, με $x = 3, \Delta x = dx = 0.5$. Στη συνέχεια να μελετήσετε την y ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της $y = x^3 + 3x$, του άξονα xx' και των ευθειών $x = -1$, $x = 1$. **(2.5 μονάδες)**

Λύση: Είναι $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = y(3.5) - y(3) = 53.375 - 36 = 17.375$. Επίσης, $y' = 3x^2 + 3$ και $dy = y'(3) \cdot dx = 30 \cdot 0.5 = 15$. Άρα $\Delta y - dy = 2.375$. Αφού, $y' = 3x^2 + 3 > 0, x \in \mathbb{R}$ η y είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα. Επιπλέον, $y'' = 6x$ και εύκολα βλέπουμε ότι η y είναι κυρτή για $x > 0$ και κοίλη για $x < 0$, ενώ στο $x = 0$ παρουσιάζει σημείο καμπής. Τέλος, είναι $y = x(x^2 + 3)$, άρα θα ισχύει $y > 0$ για $x > 0$ και $y < 0$ για $x < 0$. Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E = R_1 + R_2 = \int_{-1}^{0} -x^3 - 3x\, dx + \int_0^1 x^3 + 3x\, dx = 3.5 \text{ τ.μ.}\ .$$

Θέμα 2ο: Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα:

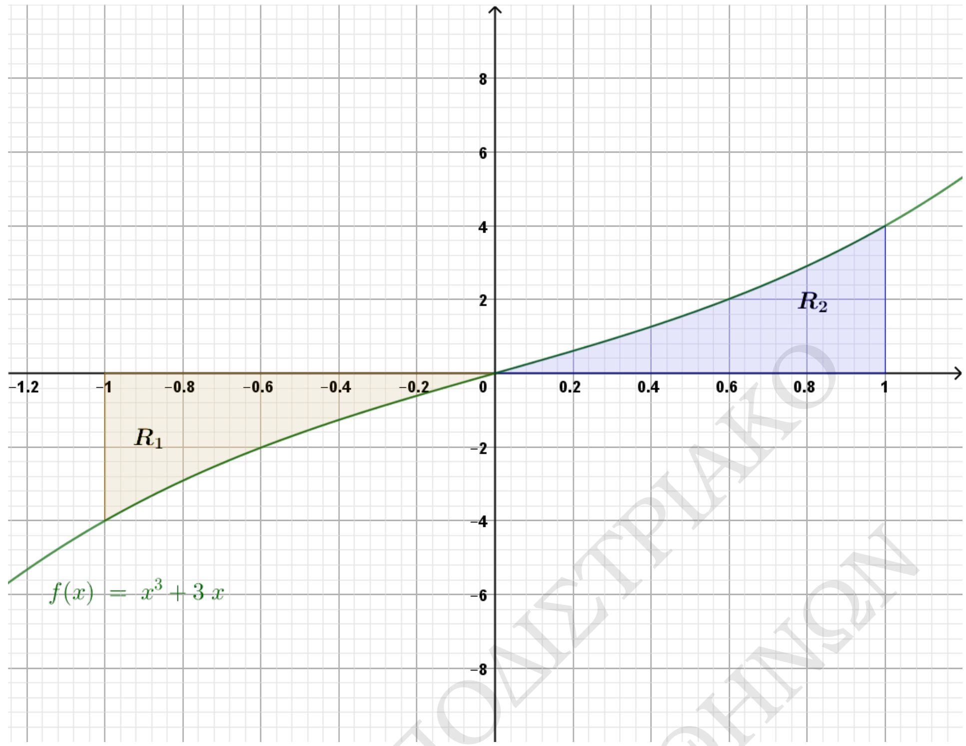
$$I = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}\, dx.$$

(2.5 μονάδες)

Λύση: Κάνουμε την αντικατάσταση $u = \sin x$, τότε $du = \cos x\ dx$ και το δοσμένο ολοκλήρωμα, γίνεται:

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}\, dx = \int \frac{1}{u^2 - 6u + 12}\, du = \int \frac{1}{(u-3)^2 + 3}\, du = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{u-3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, du =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{u-3}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sin x - 3}{\sqrt{3}}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα 1: Το ζητούμενο εμβαδόν του θέματος 1.

Θέμα 3ο: Δίνονται η συνάρτηση ζήτησης: $P = 380 - 10Q$ και η συνάρτηση προσφοράς: $P = -5Q^2 + 90Q + 10$.

α) Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης προσφοράς.

β) Να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης προσφοράς στο σημείο ισορροπίας.

(2.5 μονάδες)

Λύση: (α) Πρέπει να ισχύουν: $Q \geqslant 0$, $P \geqslant 0$ γιατί οι αρνητικές τιμές δεν έχουν νόημα και $\frac{dP}{dQ} \geqslant 0$, γιατί η συνάρτηση προσφοράς πρέπει να είναι αύξουσα. Χρησιμοποιώντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης βρίσκεται: $\frac{dP}{dQ} = -10Q + 90 \geqslant 0 \Rightarrow Q \leqslant 9$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το: $0 \leqslant Q \leqslant 9$. Για το σύνολο τιμών έχουμε $P(0) \leqslant P(Q) \leqslant P(9) \Rightarrow 10 \leqslant P(Q) \leqslant 415$. (β) Στο σημείο ισορροπίας η ζήτηση ισούται με την προσφορά: $380 - 10Q = -5Q^2 + 90Q + 10 \Rightarrow -5Q^2 + 100Q - 370 = 0$. Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας δίνονται από τον τύπο:

$$Q^*_{1,2} = \frac{-100 \pm \sqrt{(100)^2 - 4(-370)(-5)}}{2(-5)} \approx \frac{-100 \pm 51}{-10},$$

δηλαδή $Q_1^* = \frac{-100+51}{-10} = 4.9$ και $Q_2^* = \frac{-100-51}{-10} = 15.1$, η οποία απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού. Η τιμή ισορροπίας είναι: $P^* = 380 - 10(4.9) = 331$.

(γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης προσφοράς στο σημείο ισορροπίας δίνεται από τη γραμμική συνάρτηση: $P - P^* = \frac{dP}{dQ}(Q^*) \cdot (Q - Q^*)$ Όπου $\frac{dP}{dQ} = -10Q + 90 \Rightarrow \frac{dP}{dQ}(Q^*) = -10(4.9) + 90 = 41$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $P = 41Q + 130.1$.

Θέμα 4ο: Να υπολογίσετε, **με τη βοήθεια της αντικατάστασης** $u = e^x$, το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$J = \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 1}\, dx.$$

(2.5 μονάδες)

Λύση: Θέτουμε $u = e^x$ τότε $du = e^x\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{u} du$. Οπότε,

$$J = \int \frac{u+1}{u^2-1} \cdot \frac{1}{u}\, du = \int \frac{1}{u(u-1)}\, du.$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των απλών κλασμάτων, οπότε:

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u}.$$

Τελικά, έχουμε:

$$J = \int \frac{1}{u-1}\, du + \int \frac{-1}{u}\, du = \ln|u-1| - \ln|u| + c = \ln|e^x - 1| - \ln e^x + c = \ln|e^x - 1| - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$