Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Παρασκευή 7 Φεβρουαρίου 2020

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο: Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$, $y = x^3$ και των ευθειών $x = -1, x = 2$.

(2 μονάδες)

Λύση: Θέτουμε $h(x) = x^2 - x^3$ και βρίσκουμε το πρόσημο της h. Είναι $h(x) = x^2(1-x)$, οπότε για το διάστημα $[-1, 2]$ (που μας ενδιαφέρει) έχουμε $h(x) \geq 0, x \in [-1, 1]$ και $h(x) \leq 0, x \in [1, 2]$ (βλέπε και σχήμα). Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το άθροισμα των χωρίων R_1 και R_2 όπου:

$$R_1 = \int_{-1}^{1} x^2 - x^3 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

και

$$R_2 = \int_{1}^{2} x^3 - x^2 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} = \frac{17}{12}.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $R_1 + R_2 = \frac{25}{12}$.

Θέμα 2ο: Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{1}{-u^2 + 2u + 1} \, du.$$

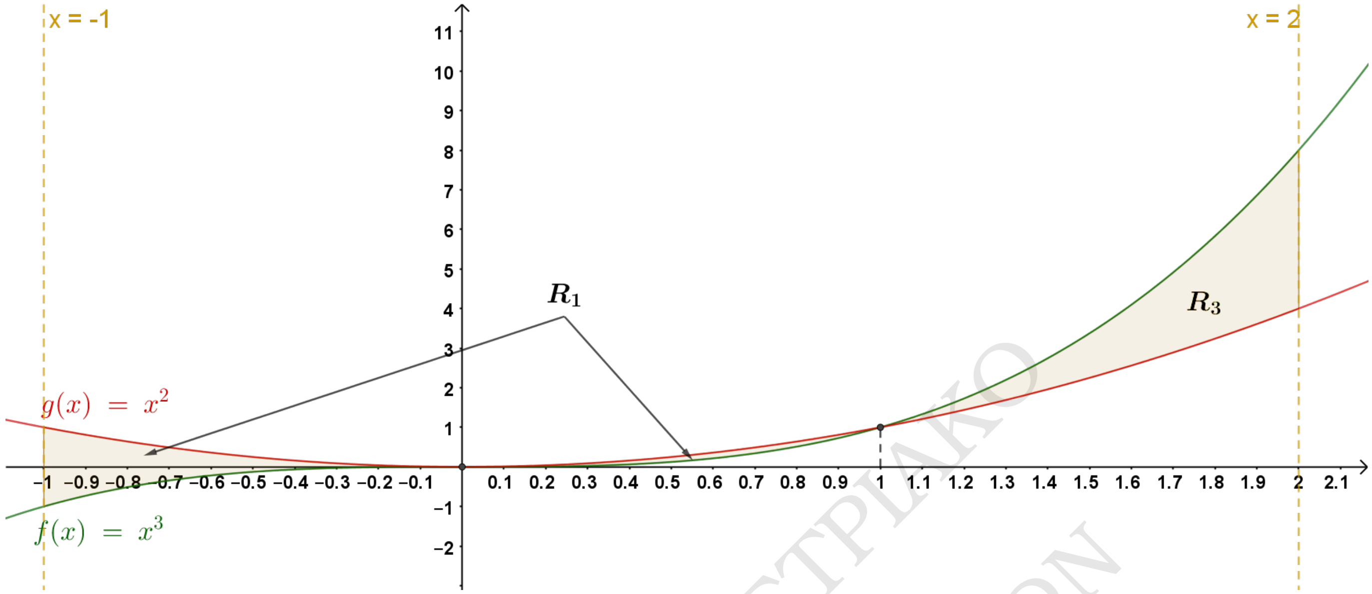
(2 μονάδες)

Λύση: Παρατηρούμε ότι $-u^2 + 2u + 1 = -(u - 1 - \sqrt{2})(u - 1 + \sqrt{2})$, επομένως θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των απλών κλασμάτων. Έχουμε:

$$\frac{1}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}(u + \sqrt{2} - 1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}(-u + \sqrt{2} + 1)}.$$

Έτσι το αρχικό μας ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{1}{2\sqrt{2}(u + \sqrt{2} - 1)} \, du + \int \frac{1}{2\sqrt{2}(-u + \sqrt{2} + 1)} \, du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{|u + \sqrt{2} - 1|}{|-u + \sqrt{2} + 1|}\right) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα 1: Το ζητούμενο εμβαδόν του θέματος 1.

Θέμα 3ο: Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u = \tan\dfrac{x}{2}$ για να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

(2 μονάδες)

Λύση:

Είναι:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2u}{u^2+1}.$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-u^2}{u^2+1}.$$

$$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx \Rightarrow du = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du.$$

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα J και έχουμε:

$$J = \int \frac{1}{\frac{2u}{u^2+1}+\frac{1-u^2}{u^2+1}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\, du = 2\int \frac{1}{-u^2+2u+1}\, du = 2I,$$

όπου το ολοκλήρωμα I έχει υπολογιστεί στο Θέμα 2.

Θέμα 4ο: Να υπολογιστεί το διάστημα και η ακτίνα σύγκλισης της σειράς, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{n!}$.

(1 μονάδα)

Λύση: Εάν, $x = 0$, η σειρά συγκλίνει. Έστω, $x \neq 0$. Θέτουμε $a_n = \frac{3^n x^n}{n!}$ και υπολογίζουμε, $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Κάνοντας χρήση του Κριτηρίου του Λόγου, η σειρά συγκλίνει, εάν, $L < 1$. Υπολογίζοντας το όριο, έχουμε, $L = \lim_{n\to\infty} \frac{3|x|}{n+1} = 0 < 1, \forall x \neq 0$. Επομένως, η σειρά συγκλίνει, $\forall x \in R$. Δηλαδή το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, \infty)$ και η ακτίνα σύγκλισης, r, του διαστήματος είναι, $r = \infty$.

Θέμα 5ο: Να υπολογιστεί η σειρά Maclaurin της συνάρτησης, με τύπο, $f(x) = x^2 e^{-x}$. Να υπολογιστεί το διάστημα σύγκλισης της σειράς.

(2 μονάδες)

Λύση: Υπολογίζουμε το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης, με τύπο, $g(x) = e^x$, κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor, γύρω από το μηδέν, $g(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Ισχύει, $g^{(n)}(x) = e^x, \forall n \geq 0, \forall x \in R$. Επομένως, $g^{(n)}(0) = 1, \forall n \geq 0$, και το ανάπτυγμα Maclaurin είναι, $g(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Θέτοντας, $a_n = \frac{x^n}{n!}$, υπολογίζουμε το όριο, $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1, \forall x$, και κάνοντας χρήση του Κριτηρίου του Λόγου, βρίσκουμε ότι η σειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in R$, δηλαδή, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in R$. Αντικαθιστώντας, x με $-x$, και πολλαπλασιάζοντας με, x^2, το διάστημα σύγκλισης παραμένει αναλλοίωτο και βρίσοκουμε ότι, $x^2 e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}, x \in R$.

Θέμα 6ο: Οι συναρτήσεις οριακού κόστους και οριακών εσόδων μιας επιχείρησης είναι: $\mathrm{MC} = 20 + 12q\left(q^2+2\right)^2$ και $\mathrm{MR} = 2q^{-2} + 3q^{-1}$ αντίστοιχα, όπου $q \neq 0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι, όταν η επιχείρηση παράγει 3 μονάδες προϊόντος, το συνολικό κόστος παραγωγής ανέρχεται στις 2760 χρηματικές μονάδες, ενώ όταν η επιχείρηση πουλάει μια μονάδα προϊόντος τα συνολικά έσοδα ανέρχονται σε 10 χρηματικές μονάδες. Ζητούνται: **(α)** η συνάρτηση συνολικού και μέσου κόστους, **(β)** η συνάρτηση συνολικών εσόδων, **(γ)** η συνάρτηση ζήτησης της συγκεκριμένης επιχείρησης. **(δ)** Αν η συνάρτηση οριακού εσόδου μιας επιχείρησης εξαρτάται από τον χρόνο $MR(t) = (t-1)^2$ βρείτε τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης κατά τα 5 πρώτα έτη λειτουργίας της.

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) $MC = 20 + 12q\left(q^2+2\right)^2 = 20 + 12q\left(q^4 + 4q^2 + 4\right) = 20 + 12q^5 + 48q^3 + 48q$

Το συνολικό κόστος προκύπτει από την ολοκλήρωση της συνάρτησης του οριακού κόστους:

$TC = \int MCdq = 20q + 12\frac{q^6}{6} + 48\frac{q^4}{4} + 48\frac{q^2}{2} + c = 20q + 2q^6 + 12q^4 + 24q^2 + c$

Για να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς c: Δίνεται ότι $TC = 2760$ για $q = 3$ οπότε $c = 54$.

Το συνολικό κόστος είναι: $TC = 20q + 2q^6 + 12q^4 + 24q^2 + 54$

Η συνάρτηση μέσου κόστους έχει τη μορφή:

$AC = \frac{TC}{q} = 20 + 2q^5 + 12q^3 + 24q + \frac{54}{q}$

(β) Τα συνολικά έσοδα προκύπτουν από την ολοκλήρωση της συνάρτησης οριακών εσόδων

$TR = \int MRdq = 2\frac{q^{-1}}{-1} + 3\ln q + c'$

$TR = 10$ για $q = 1$ άρα $c' = 12$

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων είναι η ακόλουθη:

$TR = -2q^{-1} + 3\ln q + 12$

(γ) Η συνάρτηση ζήτησης προσδιορίζετε ως εξής: Γνωρίζουμε ότι:

$TR = p^*q \Rightarrow p = \frac{TR}{q} \Rightarrow p = -2q^{-2} + \frac{3}{q}\ln q + \frac{12}{q}$

(δ) Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση οριακών εσόδων ως προς το χρόνο t από $t = 0$ μέχρι $t = 5$.

Έχουμε:

$\int_0^5 MR(t)dt = \int_0^5 (t-1)^2 dt = \left.\frac{(t-1)^3}{3}\right|_0^5 = \frac{(5-1)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{65}{3}$