Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Μαθηματικά Ι, 28 Ιανουαρίου 2015.

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο:

A) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} -2xe^{-x}, & x \geq 1 \\ \frac{x^4+x}{x^2-2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^x \sin(3x), & x \leq 0 \end{cases}. \quad \textbf{(2.5 μονάδες)}$$

B) Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$. **(1 μονάδα)**

Λύση:

A) Είναι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{k\to-\infty} \int_k^0 e^x sin(3x)\, dx + \int_0^1 \frac{x^4+x}{x^2-2} + dx + \lim_{r\to+\infty} \int_1^r -2xe^{-x}\, dx$. Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα χωριστά:

▷ Έστω $I_k = \int_k^0 e^x sin(3x)\, dx$, εφαρμόζουμε 2 φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες και έχουμε

$$I_k = \frac{1}{10}\Big(-3 + 3e^k \cos(3k) - e^k \sin(3k)\Big).$$

Για $k \to -\infty$ είναι $\lim_{k\to-\infty} e^k sin(3k) = 0$ και $\lim_{k\to-\infty} e^k cos(3k) = 0$ (κριτήριο παρεμβολής) και τελικά έχουμε

$$\boxed{\lim_{k\to-\infty} I_k = \lim_{k\to-\infty} \int_k^0 e^x sin(3x)\, dx = -\frac{3}{10}}. \tag{1}$$

▷ Έστω $I = \int_0^1 \frac{x^4+x}{x^2-2}\, dx$, επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρανομαστή κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων και από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε $x^4 + x = (x^2-2)(x^2+2) + x + 4$. Άρα

$$I = \int_0^1 \frac{(x^2-2)(x^2+2)+x+4}{x^2-2}\, dx = \int_0^1 x^2 + 2\, dx + \int_0^1 \frac{x+4}{x^2-2}\, dx = [\frac{x^3}{3} + 2x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x+4}{x^2-2}\, dx = \frac{7}{3} + \int_0^1 \frac{x+4}{x^2-2}\, dx.$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x+4}{x^2-2}\, dx$ θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των απλών κλασμάτων, οπότε αρχικά παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή του κλάσματος, $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ και αναζητάμε πραγματικούς αριθμούς A, B ώστε

$$\frac{x+4}{x^2-2} = \frac{A}{x-\sqrt{2}} + \frac{B}{x+\sqrt{2}}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας οπότε έχουμε

$$x + 4 = A(x+\sqrt{2}) + B(x-\sqrt{2}).$$

Για $x=\sqrt{2} \Rightarrow A=\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$, για $x=-\sqrt{2} \Rightarrow B=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{x+4}{x^2-2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}+1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{1}{x-\sqrt{2}}\,dx + \frac{1-2\sqrt{2}}{2}\cdot\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2}+1}{2}\cdot\Big[ln|x-\sqrt{2}|\Big]_0^1 + \frac{1-2\sqrt{2}}{2}\cdot\Big[ln|x+\sqrt{2}|\Big]_0^1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x+4}{x^2-2}\,dx = \sqrt{2}ln\Big(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\Big) - ln\sqrt{2}.$$

Τελικά έχουμε:

$$\boxed{I=\frac{7}{3}+\sqrt{2}ln\Big(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\Big)-ln\sqrt{2}}. \tag{2}$$

▷ Έστω $I_r=\int_1^r -2xe^{-x}\,dx$, εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και έχουμε

$$I_r=-2\Big(\frac{2}{e}-e^{-r}(1+r)\Big).$$

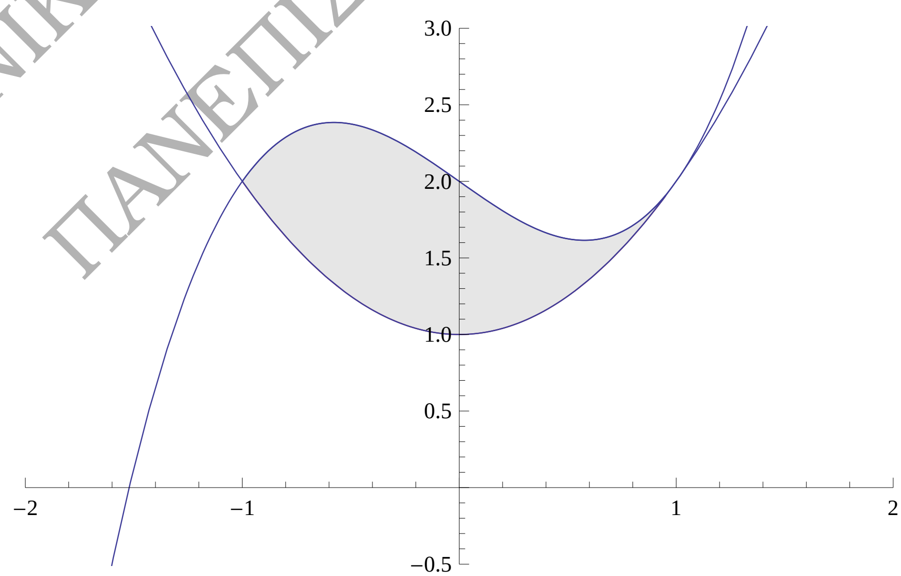
Για $r\to+\infty$ είναι $\lim_{r\to+\infty} e^{-r}(1+r)=0$ (κανόνας L' Hospital) τελικά έχουμε

$$\boxed{\lim_{r\to+\infty} I_r = \lim_{r\to+\infty}\int_1^r -2xe^{-x}\,dx = -\frac{4}{e}}. \tag{3}$$

Από τις (1), (2), (3), το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{61}{30}-\frac{4}{e}+\sqrt{2}ln\Big(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\Big)-ln\sqrt{2}\simeq -4.61099}.$$

Β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-x^2-x+1$. Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με την C_g λύνοντας την εξίσωση $h(x)=0 \Rightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1)=0 \Rightarrow x=1$ ή $x=-1$. Το σχηματιζόμενο εμβαδόν φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Το πρόσημο της h προσδιορίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

x		-1		1	
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Ολοκληρώνουμε την h στο $[-1,1]$ και έχουμε $I = \int_{-1}^{1}(x^3 - x^2 - x + 1)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \frac{4}{3}$.

Θέμα 2ο:

A) Ένας κατασκευαστής παράγει ένα προϊόν με κόστος 2 ευρώ ανά τεμάχιο. Το προϊόν πωλείται στην τιμή των 5 ευρώ ανά τεμάχιο, και σε αυτή την τιμή, υπολογίζεται ότι αγοράζονται 4000 τεμάχια το μήνα. Ο κατασκευαστής σχεδιάζει να ανεβάσει την τιμή και υπολογίζει ότι για κάθε 1 ευρώ αύξηση στην τιμή, θα πωλούνται 400 λιγότερα τεμάχια από το προϊόν του το μήνα. Σε ποια τιμή θα πρέπει να πουλήσει το προϊόν ο κατασκευαστής ώστε να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη του; **(1.5 μονάδες)**

B) Έστω η μη αρνητική συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = m,\ m \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - m^2. \quad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Λύση:

A) Έστω $q < 4000$ η ποσότητα που θα πωληθεί, τότε θα έχουν πωληθεί $4000 - q$ λιγότερα τεμάχια. Αφού 1 ευρώ αύξηση στην τιμή επιφέρει μείωση στις πωλήσεις κατά 400 τεμάχια, τα $4000 - q$ τεμάχια αντιστοιχούν σε αύξηση στην τιμή κατά $\frac{4000-q}{400}$ ευρώ. Επομένως η νέα τιμή διαμορφώνεται στα $p(q) = 5 + \frac{4000-q}{400}$ ευρώ. Τα έσοδα σε αυτή την περίπτωση θα είναι $R(q) = p \cdot q = \left(5 + \frac{4000-q}{400}\right) \cdot q$ ευρώ. Τελικά αφού το κόστος είναι 2 ευρώ ανά τεμάχιο η συνάρτηση του κέρδους δίνεται από τον τύπο:

$$P(q) = R(q) - 2q = 13q - \frac{q^2}{400}.$$

Ζητάμε λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $P(q)$ με τον περιορισμό $q > 0$.

Είναι $P'(q) = 13 - \frac{q}{200}$ και για $P'(q) = 0$ έχουμε $\boxed{q = 2600}$. Τέλος, αφού $P''(q) = -\frac{1}{200}$ είναι $P''(2600) < 0$ και από το κριτήριο της 2ης παραγώγου ο αριθμός των τεμαχίων που μεγιστοποιούν το κέρδος είναι $q = 2600$.

Η ζητούμενη τιμή είναι $p(2600) = 5 + \frac{4000-2600}{400} \Rightarrow \boxed{p(2600) = 8.5 \text{ ευρώ}}$.

B) Είναι $\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2 - 2xm + m^2) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - 2m \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx + m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$. Από την εκφώνηση έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = m$, επομένως αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ισότητα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - m^2.$$

Θέμα 3ο:

A) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών στο γράφημα της καμπύλης $y - xy^2 + x^2 + 1 = 0$ στα σημεία όπου $x = 1$. **(1.5 μονάδες)**

B) Να χρησιμοποιήσετε πολυώνυμο Taylor 3ου βαθμού για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{4.1}$. **(1.5 μονάδες)**

Λύση:

A) Παραγωγίζουμε και τα 2 μέλη της ισότητας, οπότε έχουμε

$$y' - y^2 - 2xyy' + 2x = 0 \Rightarrow y'(1 - 2xy) = y^2 - 2x.$$

Για $x = 1$ η αρχική ισότητα μας δίνει $y - y^2 + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y-2)(y+1) = 0 \Rightarrow y = 2$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε 2 σημεία επαφής τα $A(1, -1)$ και $B(1, 2)$.

Για το σημείο A είναι $x = 1$, $y = -1$ και η σχέση $y'(1 - 2xy) = y^2 - 2x$ μας δίνει $y' = -\frac{1}{3}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι $y + 1 = -\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}}$.

Για το σημείο B είναι $x = 1$, $y = 2$ και η σχέση $y'(1 - 2xy) = y^2 - 2x$ μας δίνει $y' = -\frac{2}{3}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο B είναι $y - 2 = -\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}}$.

B) Έστω $f(x) = \sqrt{x}$. Αφού ο αριθμός 4 είναι "κοντά" στον 4.1 και οι τιμές της f και των παραγώγων της στο 4 είναι εύκολο να υπολογιστούν, επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμο Taylor με κέντρο το 4. Αρχικά υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\ f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},$$

οπότε

$$f(4) = 2,\ f'(4) = \frac{1}{4},\ f''(4) = -\frac{1}{32},\ f'''(4) = \frac{3}{256}.$$

Το πολυώνυμο Taylor 3ου βαθμού με κέντρο τον αριθμό 4 θα έχει την μορφή:

$$P_3(x) = f(4) + f'(4)\frac{(x-4)}{1!} + f''(4)\frac{(x-4)^2}{2!} + f'''(4)\frac{(x-4)^3}{3!} \Rightarrow \boxed{P_3(x) = 2 + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}}.$$

Τελικά έχουμε

$$\sqrt{4.1} \simeq P_3(4.1) = 2 + \frac{(4.1-4)}{4} - \frac{(4.1-4)^2}{64} + \frac{(4.1-4)^3}{512} \simeq 2.02485 \Rightarrow \boxed{\sqrt{4.1} \simeq 2.02485}.$$

Θέμα 4ο:

A) Υποθέτουμε ότι η ζήτηση q με την τιμή p ενός αγαθού συνδέονται με την σχέση $p = -3q^2 - 15q + 62$. (α) Να υπολογίσετε την ελαστικότητα της ζήτησης όταν η τιμή είναι $p = 20$. (β) Να βρεθεί η ποσοστιαία αύξηση στην τιμή που προκαλεί ποσοστιαία μείωση στην ζήτηση ίση με 3%. **(1.5 μονάδες)**

B) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$. **(1.5 μονάδες)**

Λύση:

A) α) Αρχικά, βρίσκουμε από την σχέση $p = -3q^2 - 15q + 62$ την ποσότητα q που αντιστοιχεί στην τιμή $p = 20$. Είναι $20 = -3q^2 - 15q + 62 \Rightarrow q^2 + 5q - 14 = 0 \Rightarrow q = -7$ ή $q = 2$, όμως $q > 0$ άρα $\boxed{q = 2}$. Παραγωγίζουμε και τα **2** μέλη της ισότητας $p = -3q^2 - 15q + 62$ ως προς p και έχουμε $1 = -6qq' - 15q' \Rightarrow \boxed{q'(6q + 15) = -1}$. Για $q = 2$, $p = 20$ είναι $q' = -\frac{1}{27}$ και $\epsilon_d = q' \cdot \frac{p}{q} = -\frac{10}{27}$. Τελικά έχουμε

$$\boxed{\epsilon_d \simeq -0.37(\%)}.$$

β) Έστω ότι η ποσοστιαία αύξηση στην τιμή είναι $k\%$ τότε $\Delta p = \frac{k}{100}p$ και

$$\frac{\Delta q}{q} \cdot 100 \simeq \frac{q' \cdot \Delta p}{q} \cdot 100 = k \cdot \epsilon_d \Rightarrow k \cdot \epsilon_d = -3 \Rightarrow k \cdot (-\frac{10}{27}) = -3 \Rightarrow \boxed{k = 8.1}.$$

B) Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των απλών κλασμάτων, οπότε αναζητάμε πραγματικούς αριθμούς A, B, Γ ώστε

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $(x-1)(x+1)^2$ και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας οπότε έχουμε

$$x = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + \Gamma(x-1).$$

Για $x = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$, για $x = -1 \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2}$ και για $x = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$. Άρα

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}ln|x-1| - \frac{1}{4}ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c,\, c \in \mathbb{R}.$$

Τελικά έχουμε,

$$\boxed{\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big| - \frac{1}{2(x+1)} + c,\, c \in \mathbb{R}}.$$