Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Μαθηματικά Ι, 23 Ιανουαρίου 2017.

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο:

A) Έστω $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και ορίζουμε τη διμελή σχέση R στο A ώστε $R = \{(x, y) \in A^2 | x + y = \text{άρτιος}\}$.

α) Να κατασκευάσετε το καρτεσιανό γινόμενο A^2. β) Να εξετάσετε αν η R είναι σχέση ισοδυναμίας. **(1.5 μονάδες)**

B) Να υπολογίσετε, με τη βοήθεια του διαφορικού, μια προσέγγιση του $\sqrt{63}$. **(1 μονάδα)**

Λύση:

A) α) Είναι

$$A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

β) **Ανακλαστική:** Έστω $x \in A$, τότε $(x, x) \in R \Leftrightarrow x + x = \text{άρτιος}$, που ισχύει αφού $x + x = 2x = \text{άρτιος}$.

Συμμετρική: Έστω $x, y \in A$, τότε $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y = \text{άρτιος} \Leftrightarrow y + x = \text{άρτιος} \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

Μεταβατική: Έστω $x, y, z \in A$, τότε $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R \Rightarrow x+y = \text{άρτιος}$ και $y+z = \text{άρτιος} \Rightarrow x+y = 2k, y+z = 2m \Rightarrow x + 2y + z = 2k + 2m \Rightarrow x + z = 2k + 2m - 2y \Rightarrow x + z = 2(k + m - y) = \text{άρτιος} \Rightarrow (x, z) \in R$.

Άρα, η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική δηλαδή είναι σχέση ισοδυναμίας.

B) Γνωρίζουμε ότι, $\Delta f \simeq df = f'(x) \cdot dx$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ τότε $\Delta f = f(64) - f(63) \simeq f'(63) \cdot 1 \Rightarrow 8 - \sqrt{63} \simeq \frac{1}{2\sqrt{63}} \Rightarrow 16\sqrt{63} - 2 \cdot 63 \simeq 1 \Rightarrow \sqrt{63} \simeq \frac{127}{16}$.

Θέμα 2ο: **A)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-2x}$. Να υπολογίσετε τη n-οστή παράγωγο της f και στη συνέχεια να αναπτύξετε την f σε σειρά Maclaurin. **(1.5 μονάδες)**

B) Να βρείτε το ανοικτό διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot x^n. \qquad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Γ) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση της ζήτησης q ενός προϊόντος είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής του. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση της ζήτησης θα έχει την ίδια ελαστικότητα για όλες τις τιμές p. **(1 μονάδα)**

Λύση:

Α) Εύκολα βλέπουμε ότι $f(0) = 1$ άρα $a_0 = \frac{f(0)}{0!} = 1$, $f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow f'(0) = -2$ και $a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{-2}{1!}$ και συνεχίζοντας καταλήγουμε ότι

$$f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$$

και

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-2)^n}{n!}.$$

Άρα η σειρά Maclaurin της f είναι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \cdot x^n$$

Β) Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου, οπότε για $c_n = \frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot x^n$ είναι

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot x^{n+1}}{\frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot x \right| = |3x|.$$

Για να βρούμε το ανοικτό διάστημα σύγκλισης, λύνουμε την ανίσωση $r < 1$ ως προς x, δηλαδή $|3x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$. Το ζητούμενο διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Γ) Αφού η συνάρτηση της ζήτησης είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής της, θα ισχύει $q = \frac{a}{p}$, $a > 0$. Άρα $q' = -\frac{a}{p^2}$ και για την ελαστικότητα θα ισχύει $\varepsilon_d = -\frac{a}{p^2} \cdot \frac{p}{\frac{a}{p}} = -1 \Rightarrow \varepsilon_d = -1$, για κάθε τιμή p.

Θέμα 3ο: Δίνεται η λογιστική καμπύλη $f(t) = \frac{100}{1+e^{-3t}}$, $t \geq 0$.

α) Να εξετάσετε αν η f έχει οριζόντια(ες) ασύμπτωτη(ες) και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. Να σχεδιάσετε την f. **(2 μονάδες)**

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\ln 3} f(t)dt. \qquad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Λύση: α) Παρατηρούμε ότι, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{100}{1+e^{-3t}} = 100$. Επομένως, η ευθεία $y = 100$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f.

Μονοτονία-Ακρότατα: Είναι $f'(t) = \frac{300e^{-3t}}{(e^{-3t}+1)^2} > 0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $t = 0$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή ενώ δεν έχει μέγιστη.

Κυρτότητα: Είναι

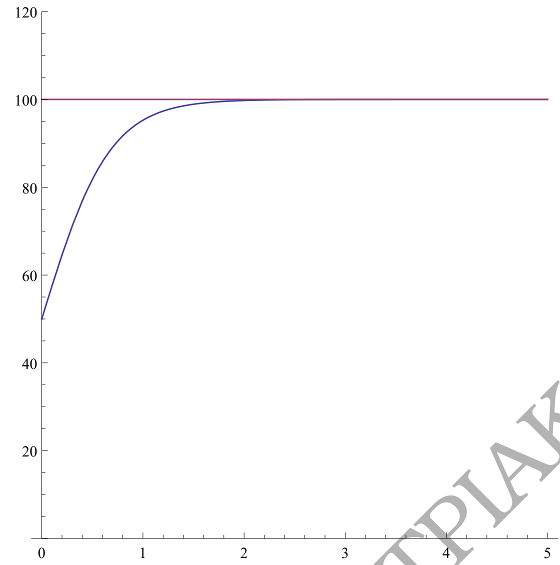
$$f''(t) = \frac{900e^{-3t}}{(e^{-3t}+1)^2} \left(\frac{2e^{-3t}}{e^{-3t}+1} - 1 \right)$$

και $f''(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{-3t}}{e^{-3t}+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-3t} < 1 \Leftrightarrow t > 0$. Άρα στο πεδίο ορισμού της, $D_f = [0, +\infty)$, η f είναι κοίλη.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο Σχήμα 1.

β) Είναι

$$\int_0^{\ln 3} f(t)dt = \int_0^{\ln 3} \frac{100}{1+e^{-3t}} dt = 100 \int_0^{\ln 3} \frac{e^{3t}}{e^{3t}+1} dt = 100 \Big[\frac{\ln(1+e^{3t})}{3} \Big]_0^{\ln 3} = \ldots = \frac{100\ln(14)}{3}.$$



Σχήμα 1: Η συνάρτηση $f(t) = \frac{100}{1+e^{-3t}}$.

Θέμα 4ο:

Α) Να υπολογίσετε, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx. \qquad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x-1}{3x^2+9}\, dx$. **(1 μονάδα)**

Λύση:

Α) Γράφουμε το ολοκλήρωμα με μορφή ορίου και στη συνέχεια εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση, οπότε έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = \lim_{k\to+\infty} \int_1^k \frac{x}{e^x} dx = \lim_{k\to+\infty} \left([-xe^{-x}]_1^k + \int_1^k e^{-x} dx \right) = \lim_{k\to+\infty} \left([-xe^{-x}]_1^k + [-e^{-x}]_1^k \right) = \ldots =$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{-k-1}{e^k} + \frac{2}{e} \right) = \frac{2}{e} \simeq 0.735.$$

Παρατήρηση: Με εφαρμογή του κανόνα L'Hospital έχουμε ότι $\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{-k-1}{e^k} \right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{-1}{e^k} \right) = 0$.

Β) Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δυο ολοκληρώματα οπότε έχουμε

$$\int \frac{x-1}{3x^2+9}\, dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{x}{x^2+3}\, dx - \int \frac{1}{x^2+3}\, dx \right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3}\, dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dx \right) =$$

$$\frac{1}{6} \ln(x^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$