

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εισηγητής: Βασίλειος Ν. Κασίκης

Μάθημα: Μαθηματικά Ι

Πέμπτη 24 Ιουλίου 2014

Θέμα 1ο:

A) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1 \text{ μονάδα})$$

B) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$. (1.5 μονάδες)

Γ) Να χρησιμοποιήσετε πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού για να προσεγγίσετε την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$, όπου x_1, x_2 οι θέσεις των σημείων καμπής της f με $x_1 < x_2$. (1 μονάδα)

Θέμα 2ο:

A) Η συνάρτηση ζήτησης q ως προς την τιμή p για ένα προϊόν δίνεται από την σχέση $p^3 + p = q^3 + q$. Να δείξετε ότι για $p = 1$ η ζήτηση έχει μοναδιαία ελαστικότητα. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα. (1.5 μονάδες)

B) Αν με R συμβολίσουμε το ολικό έσοδο να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{dR}{dp} = q(1 + \varepsilon_d)$. (0.5 μονάδες)

Γ) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση της ζήτησης q ενός προϊόντος είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής του. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση της ζήτησης θα έχει την ίδια ελαστικότητα για όλες τις τιμές p . (1.5 μονάδες)

Θέμα 3ο:

A) Να εξετάσετε αν η σχέση $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ διαιρεί τον } y\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. (1 μονάδα)

B) Η συνάρτηση ζήτησης ως προς την τιμή δίνεται από την σχέση $\ln q = p^2 + 2p + 2$. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{1, 3, 5\}$, για κάθε τιμή $p \in A$ να βρείτε την ελαστικότητα $\varepsilon_d(p)$. (1 μονάδα) Αν B είναι το σύνολο που περιέχει τις ελαστικότητες που υπολογίσατε, δηλαδή $B = \{a \in \mathbb{R} \mid a = \varepsilon_d(p), p \in A\}$, να υπολογίσετε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$. (0.5 μονάδες)

Θέμα 4ο:

A) Μία εταιρεία σκέφτεται να ναυλώσει ένα λεωφορείο χωρητικότητας 50 ατόμων για γκρουπ με τουλάχιστον 35 άτομα. Αν ένα γκρουπ περιέχει ακριβώς 35 άτομα τότε η τιμή του ενός εισιτηρίου είναι 51 ευρώ. Σε μεγάλα γκρουπ ατόμων, για κάθε ένα άτομο που υπερβαίνει τα 35 άτομα μειώνεται το εισιτήριο ανά άτομο κατά 1 ευρώ. Προσδιορίστε το μέγεθος του γκρουπ των ατόμων που μεγιστοποιεί τα έσοδα από τα εισιτήρια. (1.5 μονάδες)

B) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$. (2 μονάδες)