Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Μαθηματικά Ι, 24 Ιουλίου 2014.

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο:

Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}. \qquad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Β) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$. **(1.5 μονάδες)**

Γ) Να χρησιμοποιήσετε πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού για να προσεγγίσετε την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$, όπου x_1, x_2 οι θέσεις των σημείων καμπής της f με $x_1 < x_2$. **(1 μονάδα)**

Λύση:

Α) Είναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(\frac{-x^2}{2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ και $f''(x) = \left(\frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1) e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Εύρεση μονοτονίας και ακροτάτων: Θέτουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \Rightarrow x = 0$ (κρίσιμο σημείο).

Ο πίνακας μονοτονίας είναι:

		0	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

Επομένως, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $(0, f(0)) \equiv (0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ τοπικό μέγιστο (το οποίο είναι ολικό μέγιστο).

Εύρεση κυρτότητας και σημείων καμπής: Θέτουμε $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1) e^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = -1$ (πιθανές θέσεις σημείων καμπής).

		-1		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$		$\frown$		$\smile$

Επομένως, η συνάρτηση f παρουσιάζει σημεία καμπής στα σημεία $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$.

Β) Με βάση γνωστή ιδιότητα έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx$.

Θέτουμε $I_1 = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx$ και $I_2 = \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx$.

Αρχικά, για $k < 0$, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_{k}^{0} xf(x)\,dx = \int_{k}^{0} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k}^{0} xe^{\frac{-x^2}{2}}\,dx =$
$\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k}^{0} -xe^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-k^2}{2}}^{0} e^{u}\,du = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}[e^{u}]_{\frac{-k^2}{2}}^{0} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{\frac{-k^2}{2}})$.

Εφαρμόσαμε αλλαγή μεταβλητής ως ακολούθως:

Θέτουμε $u = -\frac{x^2}{2}$, άρα $du = -xdx$ και για $x = k \Rightarrow u = -\frac{k^2}{2}$ ενώ για $x = 0 \Rightarrow u = 0$.

Με ανάλογο τρόπο, για $m > 0$ προκύπτει ότι $\int_{0}^{m} xf(x)\,dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}(e^{\frac{-m^2}{2}} - 1)$.

Τελικά έχουμε $I_1 + I_2 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{k\to-\infty}(1 - e^{\frac{-k^2}{2}}) + \lim_{m\to+\infty}(e^{\frac{-m^2}{2}} - 1)\right) = 1 - 1 = 0$.

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = 0$.

Γ) Οι θέσεις των σημείων καμπής είναι $x_1 = -1, x_2 = 1$ επομένως αναζητάμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^x$ για την οποία εύκολα βλέπουμε ότι $h'(x) = h''(x) = e^x$ και $h(0) = h'(0) = h''(0) = 1$ άρα το πολυώνυμο Taylor δευτέρου βαθμού για την h είναι $P_2(x) = h(0) + h'(0)\frac{x}{1!} + h''(0)\frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Θέτουμε στο $P_2(x)$ όπου x το $-\frac{x^2}{2}$ οπότε προκύπτει το πολυώνυμο Taylor που προσεγγίζει την $e^{-\frac{x^2}{2}}$ και είναι το $Q_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$. Άρα

$$I \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8})\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40}\right]_{-1}^{1} = \frac{103}{60\sqrt{2\pi}}.$$

Θέμα 2ο:

Α) Η συνάρτηση ζήτησης q ως προς την τιμή p για ένα προϊόν δίνεται από την σχέση $p^3 + p = q^3 + q$. Να δείξετε ότι για $p = 1$ η ζήτηση έχει μοναδιαία ελαστικότητα. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα. **(1.5 μονάδες)**

Β) Αν με R συμβολίσουμε το ολικό έσοδο να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{dR}{dp} = q(1 + \varepsilon_d)$. **(0.5 μονάδες)**

Γ) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση της ζήτησης q ενός προϊόντος είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής του. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση της ζήτησης θα έχει την ίδια ελαστικότητα για όλες τις τιμές p. **(1.5 μονάδες)**

Λύση:

Α) Για την ελαστικότητα ισχύει ότι $\varepsilon_d = q' \cdot \frac{p}{q}$. Εφαρμόζουμε παραγώγιση πεπλεγμένης συνάρτησης οπότε έχουμε

$$(p^3 + p)' = (q^3 + q)' \Rightarrow 3p^2 + 1 = 3q^2q' + q' \Rightarrow q' = \frac{3p^2 + 1}{3q^2 + 1}.$$

Όταν $p = 1$ η σχέση $p^3 + p = q^3 + q$ μας δίνει $q^3 + q = 2 \Rightarrow q^3 + q - 2 = 0$. Προφανής ρίζα το $q = 1$, άρα από το σχήμα Horner έχουμε $q^3 + q - 2 = 0 \Rightarrow (q - 1)(q^2 + q + 2) = 0 \Rightarrow q = 1$ (Παρατηρήστε ότι το τριώνυμο δεν έχει ρίζες).

Για $p = 1$, $q = 1$ έχουμε $q' = \frac{3\cdot 1^2 + 1}{3\cdot 1^2 + 1} = 1$ και τελικά είναι $\varepsilon_d = 1$.

Ερμηνεία: Αύξηση της τιμής κατά 1% επιφέρει αύξηση της ζήτησης κατά το ίδιο ποσοστό. (Να εξηγήσετε κατά πόσο μια τέτοια κατάσταση έχει ρεαλιστική βάση).

Β) Θεωρία.

Γ) Αφού η συνάρτηση της ζήτησης είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής του θα ισχύει $q = \frac{a}{p}$, $a > 0$. Άρα $q' = -\frac{a}{p^2}$ και για την ελαστικότητα θα ισχύει $\varepsilon_d = -\frac{a}{p^2} \cdot \frac{p}{\frac{a}{p}} = -1 \Rightarrow \varepsilon_d = -1$, για κάθε τιμή p.

Θέμα 3ο:

Α) Να εξετάσετε αν η σχέση $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |$ ο x διαιρεί τον $y\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. **(1 μονάδα)**

Β) Η συνάρτηση ζήτησης ως προς την τιμή δίνεται από την σχέση $\ln q = p^2 + 2p + 2$. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{1, 3, 5\}$, για κάθε τιμή $p \in A$ να βρείτε την ελαστικότητα $\varepsilon_d(p)$. **(1 μονάδα)** Αν B είναι το σύνολο που περιέχει τις ελαστικότητες που υπολογίσατε, δηλαδή $B = \{a \in \mathbb{R} | a = \varepsilon_d(p), p \in A\}$, να υπολογίσετε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$. **(0.5 μονάδες)**

Λύση:

Α) Ανακλαστικότητα: Αφού ο x διαιρεί τον εαυτό του, το στοιχείο $(x, x) \in R$ και η σχέση R είναι ανακλαστική.

Συμμετρικότητα: Αν ο x διαιρεί τον y τότε αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι και ο y διαιρεί τον x επομένως αν $(x, y) \in R$ αυτό δεν συνεπάγεται ότι $(y, x) \in R$. Τελικά η R δεν είναι συμμετρική οπότε δεν μπορεί να είναι σχέση ισοδυναμίας.

Παρατήρηση: Προφανώς μπορούσαμε κατευθείαν να δείξουμε ότι η σχέση δεν είναι συμμετρική οπότε δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

Β) Παρατηρούμε ότι, με παραγώγιση της σχέσης που μας δίνεται έχουμε $(\ln q)' = (p^2 + 2p + 2)' \Rightarrow \frac{q'}{q} = 2p + 2$, όμως $\varepsilon_d = \frac{q'}{q} \cdot p \Rightarrow \varepsilon_d = (2p + 2)p$.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ελαστικότητας που αποδείξαμε, οπότε για $p \in A$ έχουμε, $p = 1 \Rightarrow \varepsilon_d = 4$, $p = 3 \Rightarrow \varepsilon_d = 24$ και για $p = 5 \Rightarrow \varepsilon_d = 60$. Το σύνολο B έχει σαν στοιχεία τις παραπάνω ελαστικότητες οπότε είναι $B = \{4, 24, 60\}$. Για το καρτεσιανό γινόμενο του $A \times B$ δημιουργούμε όλα τα δυνατά ζεύγη με πρώτη συντεταγμένη στοιχείο του A και δεύτερη στοιχείο του B. Τελικά έχουμε

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 24), (1, 60), (3, 4), (3, 24), (3, 60), (5, 4), (5, 24), (5, 60)\}.$$

Θέμα 4ο:

Α) Μία εταιρεία σκέφτεται να ναυλώσει ένα λεωφορείο χωρητικότητας 50 ατόμων για γκρουπ με τουλάχιστον 35 άτομα. Αν ένα γκρουπ περιέχει ακριβώς 35 άτομα τότε η τιμή του ενός εισιτηρίου είναι 51 ευρώ. Σε μεγάλα γκρουπ ατόμων, για κάθε ένα άτομο που υπερβαίνει τα 35 άτομα μειώνεται το εισιτήριο ανά άτομο κατά 1 ευρώ. Προσδιορίστε το μέγεθος του γκρουπ των ατόμων που μεγιστοποιεί τα έσοδα από τα εισιτήρια. **(1.5 μονάδες)**

Β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3+x}{x-1} \, dx$. **(2 μονάδες)**

Λύση:

Α) Έστω x ο αριθμός των ατόμων που υπερβαίνουν τα 35 άτομα. Τότε το συνολικό πλήθος των ατόμων θα είναι $x + 35$ και αφού κάθε ένα από τα x άτομα επιφέρει μείωση κατά 1 ευρώ στην τιμή του εισιτηρίου, τα x άτομα θα επιφέρουν μείωση κατά x ευρώ. Οπότε η τιμή του εισιτηρίου διαμορφώνεται στα $51 - x$ ευρώ. Συμβολίζουμε με $R(x)$ την συνάρτηση των εσόδων από την πώληση των εισιτηρίων, οπότε με βάση τα παραπάνω θα έχουμε

$$R(x) = (x + 35)(51 - x), \ \ 0 \leq x \leq 15.$$

Είναι $R'(x) = (51 - x) - (x + 35) = -2x + 16$ και $R'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$. Αφού η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα για να βρούμε το μέγιστο υπολογίζουμε τα $R(0) = 1785$, $R(8) = 1849$, $R(15) = 1800$ και στην τιμή του x για την οποία βρίσκουμε την μεγαλύτερη τιμή της $R(x)$ έχουμε μεγιστοποίηση των εσόδων. Άρα $x = 8$ και το ζητούμενο μέγεθος του γκρουπ είναι $35 + 8 = 43$ άτομα.

Β) Αφού ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρανομαστή, αρχικά κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων και έχουμε $x^3 + x = (x - 1)(x^2 + x + 2) + 2$. Επομένως έχουμε

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\, dx = \int \frac{(x-1)(x^2 + x + 2) + 2}{x - 1}\, dx = \int x^2 + x + 2\, dx + \int \frac{2}{x - 1}\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x - 1| + c, c \in \mathbb{R}.$$