Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Μαθηματικά Ι, 10 Σεπτεμβρίου 2014.

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο:

Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}. \qquad \textbf{(1.5 μονάδες)}$$

Β) Να εξετάσετε αν συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$. **(1 μονάδα)**

Γ) Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που οριοθετείται από τον άξονα $x'x$ και από το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \leq x \leq 2$. **(1 μονάδα)**

Λύση:

Α) Είναι $f'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{\pi(1+x^2)^2}$ και $f''(x) = \left(-\frac{2x}{\pi(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{\pi(1+x^2)^3}$.

Εύρεση μονοτονίας και ακροτάτων: θέτουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{\pi(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ (κρίσιμο σημείο).

Ο πίνακας μονοτονίας είναι:

		0	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

Επομένως, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $(0, f(0)) \equiv (0, \frac{1}{\pi})$ τοπικό μέγιστο (το οποίο είναι ολικό μέγιστο).

Εύρεση κυρτότητας και σημείων καμπής: Θέτουμε $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(3x^2-1)}{\pi(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ή $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (πιθανές θέσεις σημείων καμπής).

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$		$\frown$		$\smile$

Επομένως, η συνάρτηση f παρουσιάζει σημεία καμπής στα σημεία $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f(-\frac{1}{\sqrt{3}}))$ και $(\frac{1}{\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}}))$.

Β) Με βάση γνωστή ιδιότητα έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} -xf(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx$.

Θέτουμε $I_1 = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$.

Για $k > 0$, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^k xf(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^k \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^k \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[ln(1+x^2)\Big]_0^k =$ $\frac{1}{2\pi}\Big(ln(1+k^2) - ln1\Big) = \frac{ln(1+k^2)}{2\pi}$.

Τελικά έχουμε $I_1 = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi} ln(1+k^2) = +\infty$.

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\,dx$ δεν συγκλίνει.

Γ) Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, οπότε έχουμε $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$ $x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 2$. Το πρόσημο της f προσδιορίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

		-1		0		2	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ολοκληρώνουμε την f σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 2]$ και αθροίζουμε τις απόλυτες τιμές των αποτελεσμάτων.

Είναι $I_1 = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\Big]_{-1}^{0} = \frac{5}{12}$ και $I_2 = \int_0^2(x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\Big]_0^2 = -\frac{8}{3}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = |I_1| + |I_2| = \frac{37}{12}$.

Θέμα 2ο:

Α) Ένας έμπορος αυτοκινήτων πουλά 200 αυτοκίνητα το χρόνο. Η διατήρηση ενός αυτοκινήτου στην αποθήκη κοστίζει 100 ευρώ το χρόνο. Το κόστος παραγγελίας νέων αυτοκινήτων από τον κατασκευαστή εμπεριέχει ένα σταθερό κόστος 100 ευρώ συν 80 ευρώ ανά αυτοκίνητο. Να υπολογίσετε πόσες φορές τον χρόνο θα πρέπει να παραγγέλνει αυτοκίνητα και σε τι μέγεθος παραγγελίας, έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το ετήσιο κόστος. Να κάνετε την υπόθεση ότι αν x είναι το μέγεθος της παραγγελίας, $x > 0$, τότε κατά μέσο όρο στην αποθήκη παραμένουν $\frac{x}{2}$ αυτοκίνητα. **(1.5 μονάδες)**

Β) Το οριακό κόστος σε ένα εργοστάσιο είναι $\frac{lnq}{q}$ ευρώ/μονάδα, όταν το επίπεδο παραγωγής είναι q μονάδες. Να βρείτε πόσο θα μεταβληθεί το ολικό κατασκευαστικό κόστος αν το επίπεδο παραγωγής αυξηθεί από 10 σε 12 μονάδες. **(1.5 μονάδες)**

Λύση:

Α) Έστω x το μέγεθος της παραγγελίας, τότε ο αριθμός των παραγγελιών ανά έτος θα είναι $\frac{200}{x}$ (αφού παραγγέλνει 200 αυτοκίνητα στο έτος). Το κόστος της κάθε παραγγελίας x αυτοκινήτων είναι $100 + 80x$ ευρώ, επομένως για τις $\frac{200}{x}$

παραγγελίες θα είναι $\frac{200}{x} \cdot (100 + 80x)$ ευρώ. Το κόστος αποθήκευσης, με βάση την υπόθεση που κάνουμε, θα είναι $\frac{x}{2} \cdot 100 = 50x$ ευρώ. Επομένως, το συνολικό κόστος είναι $C(x) = \frac{200}{x} \cdot (100 + 80x) + 50x \Rightarrow C(x) = \frac{20000}{x} + 50x + 16000$.

Ζητάμε λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $C(x)$ με τον περιορισμό $x > 0$.

Είναι $C'(x) = 50 - \frac{20000}{x^2} = \frac{50(x-20)(x+20)}{x^2}$ και για $C'(x) = 0$ έχουμε $x = 20$ (αφού $x > 0$). Τέλος, αφού $C''(x) = \frac{40000}{x^3}$ είναι $C''(20) = 5 > 0$ και από το κριτήριο της 2ης παραγώγου ο αριθμός των αυτοκινήτων ανά παραγγελία που ελαχιστοποιούν το κόστος είναι $x = 20$. Ο αριθμός των παραγγελιών είναι $\frac{200}{20} = 10$. Δηλαδή ο έμπορος πρέπει να κάνει 10 φορές παραγγελία των 20 αυτοκινήτων.

Β) Είναι $C'(q) = \frac{lnq}{q}$, $q > 0$ άρα το ζητούμενο ολικό κόστος δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{10}^{12} C'(q)\,dq = \int_{10}^{12} \frac{lnq}{q}\,dq = \int_{10}^{12} lnq \cdot (lnq)'\,dq = \frac{1}{2}\Big[ln^2 q\Big]_{10}^{12} = \frac{1}{2}\Big(ln^2(12) - ln^2(10)\Big) = 0.436431$.

Θέμα 3ο:

Α) Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη $x^2y^3 + xy^2 + y + 1 = 0$ στο $x = 1$. **(1.5 μονάδες)**

Β) Με την βοήθεια του διαφορικού να εκτιμήσετε την μεταβολή στην συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 5$, αν το x από την τιμή 2 μειωθεί στην τιμή 1.99. Να δώσετε μια σύντομη ερμηνεία του αποτελέσματος. **(1.5 μονάδες)**

Λύση:

Α) Παραγωγίζουμε και τα 2 μέλη της ισότητας, οπότε έχουμε $(x^2)'y^3 + x^2(y^3)' + (x)'y^2 + x(y^2)' + (y)' = 0 \Rightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2y' + y^2 + 2xyy' + y' = 0 \Rightarrow (3x^2y^2 + 2xy + 1)y' = -2xy^3 - y^2$. Για $x = 1$ η αρχική ισότητα μας δίνει $y^3 + y^2 + y + 1 = 0 \Rightarrow y^2(y+1) + (y+1) = 0 \Rightarrow (y^2+1)(y+1) = 0 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$. Οπότε για $x = 1$, $y = -1$ η σχέση $(3x^2y^2 + 2xy + 1)y' = -2xy^3 - y^2$ μας δίνει $y' = \frac{1}{2}$. Τελικά η ζητούμενη κλίση είναι $\frac{1}{2}$.

Β) Γνωρίζουμε ότι για το διαφορικό ισχύει $df = f'(x)dx$. Για $x = 2$ στην $f'(x) = 3x^2 + 1$ έχουμε $f'(2) = 13$. Επιπλέον, $dx = 1.99 - 2 = -0.01$. Από τον προσεγγιστικό τύπο ισχύει $\Delta f \simeq df(2) = 13 \cdot (-0.01) = -0.13$. Σαν συμπέρασμα έχουμε ότι η μείωση κατά $\frac{1}{100}$ στην τιμή του x προκάλεσε μείωση κατά $\frac{13}{100}$ στην τιμή της f.

Θέμα 4ο:

Α) Η συνάρτηση ζήτησης q, μιας εταιρείας, ως προς την τιμή p για ένα προϊόν δίνεται από την σχέση $q + 2p = 90$ ενώ η συνάρτηση του μέσου κόστους δίνεται από την σχέση $AC = q^2 - 8q + \frac{2}{q} + 57$. Να βρείτε το επίπεδο των διαθέσιμων αγαθών q που: α) μεγιστοποιούν τα έσοδα, β) ελαχιστοποιούν το οριακό κόστος, γ) μεγιστοποιούν το κέρδος. **(1.5 μονάδες)**

Β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx$. **(2 μονάδες)**

Λύση:

Α) α) Για τα έσοδα ισχύει $R = p \cdot q$ και αφού $q + 2p = 90 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}q + 45$ έχουμε $R = q(-\frac{1}{2}q + 45) \Rightarrow R = -\frac{1}{2}q^2 + 45q$. Βρίσκουμε την παράγωγο, $R' = -q + 45$ και για $R' = 0 \Rightarrow q = 45$. Αφού $R'' = -1 < 0$, από το κριτήριο της 2ης παραγώγου έχουμε ότι για $q = 45$ μεγιστοποιούνται τα έσοδα.

β) Ισχύει ότι $AC = \frac{C}{q} \Rightarrow C = AC \cdot q \Rightarrow C = q^3 - 8q^2 + 57q + 2$. Το οριακό κόστος είναι $MC = C' = 3q^2 - 16q + 57$, οπότε βρίσκουμε το ελάχιστο στην συνάρτηση MC.

Είναι $MC' = 6q - 16 = 0 \Rightarrow q = \frac{8}{3}$. Αφού $MC'' = 6 > 0$, από το κριτήριο της 2ης παραγώγου έχουμε ότι για $q = \frac{8}{3}$ ελαχιστοποιείται το οριακό κόστος.

γ) Για το κέρδος ισχύει $P = R - C = -q^3 + \frac{15}{2}q^2 - 12q - 2$. Παραγωγίζουμε και έχουμε, $P' = -3q^2 + 15q - 12$ οπότε $P' = 0 \Rightarrow -3q^2 + 15q - 12 = 0 \Rightarrow q = 1$ ή $q = 4$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι $P'' = -6q + 15$, οπότε για $q = 1 \Rightarrow P'' = 9 > 0$ που σημαίνει ότι έχουμε τοπ. ελάχιστο και για $q = 4 \Rightarrow P'' = -9 < 0$ που σημαίνει ότι έχουμε τοπ. μέγιστο. Παρατηρούμε ότι για $q = 4$ έχουμε ολικό μέγιστο.

B) Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των απλών κλασμάτων, οπότε αρχικά παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή του κλάσματος, $x^3 + 3x^2 - 10x = x(x-2)(x+5)$ οπότε αναζητάμε πραγματικούς αριθμούς A, B, Γ ώστε

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{x+5}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $x(x-2)(x+5)$ και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας οπότε έχουμε

$$x + 4 = A(x-2)(x+5) + Bx(x+5) + \Gamma x(x-2).$$

Για $x = 0 \Rightarrow A = -\frac{2}{5}$, για $x = 2 \Rightarrow B = \frac{3}{7}$ και για $x = -5 \Rightarrow \Gamma = -\frac{1}{35}$. Άρα

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx = -\frac{2}{5}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{7}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{35}\int \frac{1}{x+5}\,dx = -\frac{2}{5}ln|x| + \frac{3}{7}ln|x-2| - \frac{1}{35}ln|x+5| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$