Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Μαθηματικά Ι, 22 Σεπτεμβρίου 2015.

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο:

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = C_1 e^x + C_2 x^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ επαληθεύει την εξίσωση

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) y'' + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) y' + (x-1)y = 0. \quad \textbf{(1 μονάδα)}$$

B) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}$. **(1 μονάδα)**

Λύση: **A)** ▷ Υπολογίζουμε τις δύο πρώτες παραγώγους της y. Έτσι είναι

$$y' = \left(C_1 e^x + C_2 x^2\right)' = C_1 e^x + 2C_2 x.$$
$$y'' = \left(C_1 e^x + 2C_2 x\right)' = C_1 e^x + 2C_2.$$

▷ Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε,

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) y'' + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) y' + (x-1)y = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)(C_1 e^x + 2C_2) + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)(C_1 e^x + 2C_2 x) + (x-1)(C_1 e^x + C_2 x^2) =$$

$$C_1 e^x \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1\right) + C_2 x^2 - 2C_2 x + 2C_2 x - C_2 x^3 + C_2 x^3 - C_2 x^2 = 0.$$

B) Έστω $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx$, εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση δύο φορές και έχουμε $I = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx \Rightarrow I = 1 - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}$. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε ότι $J = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx = \frac{1}{2}$.

Θέμα 2ο:

A) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{a^x + a^{-x}}\, dx, \quad a > 0.$ **(1.5 μονάδες)**

B) Αν η συνάρτηση ζήτησης δίνεται από τη σχέση $q(p) = k \cdot p^m,\ k, m > 0$, να δείξετε ότι η ελαστικότητα της ζήτησης είναι

$$\epsilon_d = \frac{\ln\left(\frac{q}{k}\right)}{\ln p}. \quad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Λύση:

A) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της αντικατάστασης, έτσι θέτουμε $u = a^x$. Άρα, $du = a^x \ln a\ dx \Rightarrow du = u \ln a\ dx \Rightarrow dx = \frac{1}{u \ln a} du$. Αντικαθιστώντας έχουμε,

$$\int \frac{1}{a^x + a^{-x}} dx = \int \frac{\frac{1}{u \ln a}}{u + u^{-1}} du = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{1}{\ln a} \arctan u + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Επιστρέφουμε στην αρχική μεταβλητή οπότε έχουμε,

$$\boxed{\int \frac{1}{a^x + a^{-x}} dx = \frac{1}{\ln a} \arctan a^x + c, \ c \in \mathbb{R}.}$$

B) Από τον τύπο της ελαστικότητας έχουμε,

$$\epsilon_d = q'(p)\frac{p}{q(p)} = \frac{kmp^{m-1}p}{kp^m} = \frac{m\cancel{kp^m}}{\cancel{kp^m}} = m \Rightarrow \boxed{\epsilon_d = m}.$$

Όμως, $\ln q(p) = \ln kp^m = \ln k + \ln p^m = \ln k + m \ln p \Rightarrow \ln q - \ln k = m \ln p \Rightarrow \boxed{m = \frac{\ln q - \ln k}{\ln p}}$ ή $\boxed{m = \frac{\ln\left(\frac{q}{k}\right)}{\ln p}}.$

Τελικά έχουμε,

$$\boxed{\epsilon_d = \frac{\ln\left(\frac{q}{k}\right)}{\ln p}.}$$

Θέμα 3ο:

A) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{cos^2 x} dx$. **(1 μονάδα)**

B) Να χρησιμοποιήσετε πεπλεγμένη παραγώγιση για να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = y(x)$ στο σημείο (x_0, y_0), αν $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ και $(x_0, y_0) = (3, 1)$. **(1.5 μονάδες)**

Λύση:

A) Παρατηρούμε ότι $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot (\tan x)' dx$ οπότε εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και έχουμε

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot (\tan x)' dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - (-\ln|\cos x|) + c = x \tan x + \ln|\cos x| + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

B) Χρησιμοποιούμε πεπλεγμένη παραγώγιση οπότε έχουμε

$$\left[2(x^2 + y^2)^2\right]' = \left[25(x^2 - y^2)\right]' \Rightarrow 4(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 25(2x - 2yy') \Rightarrow 4(x + yy')(x^2 + y^2) = 25(x - yy') \Rightarrow$$

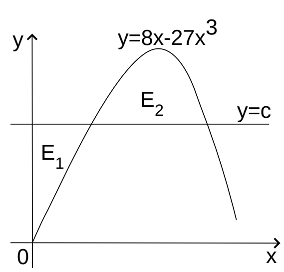
$$4yy'(x^2 + y^2) + 25yy' = 25x - 4x(x^2 + y^2) \Rightarrow y'\left[25y + 4y(x^2 + y^2)\right] = 25x - 4x(x^2 + y^2).$$

Για $x = 3$ και $y = 1$ έχουμε $y' = -\frac{9}{13}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y - 1 = -\frac{9}{13}(x - 3) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}.}$$

Θέμα 4ο:

A) Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια οριζόντια γραμμή $y = c$ η οποία τέμνει την καμπύλη $y = 8x - 27x^3$. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό c ώστε για τα εμβαδά E_1, E_2 να ισχύει $E_1 = E_2$. **(3 μονάδες)**



B) Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες για τα διαφορικά, όπου u, v συναρτήσεις του x:

α) $d(uv) = vdu + udv$ και β) $d\Big(\frac{u}{v}\Big) = \frac{vdu-udv}{v^2}$. **(1 μονάδα)**

Λύση: **A)** Υποθέτουμε ότι η ευθεία $y = c$ τέμνει την καμπύλη $y = 8x - 27x^3$ στα σημεία $A(x_1, c)$, $B(x_2, c)$. Από την ισότητα $E_1 = E_2$ έχουμε:

$$\int_0^{x_1} (c + 27x^3 - 8x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (8x - 27x^3 - c)\,dx \Rightarrow \Big[cx + \frac{27x^4}{4} - 4x^2\Big]_0^{x_1} = \Big[4x^2 - \frac{27x^4}{4} - cx\Big]_{x_1}^{x_2} =$$

$$cx_1 + \frac{27x_1^4}{4} - 4x_1^2 = 4x_2^2 - \frac{27x_2^4}{4} - cx_2 - 4x_1^2 + \frac{27x_1^4}{4} + cx_1 \Rightarrow x_2(4x_2 - \frac{27x_2^3}{4} - c) = 0.$$

Όμως $x_2 > 0$ άρα

$$4x_2 - \frac{27x_2^3}{4} = c \tag{1}$$

Το σημείο $B(x_2, c)$ ανήκει στην καμπύλη $y = 8x - 27x^3$ άρα

$$c = 8x_2 - 27x_2^3 \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$4x_2 - \frac{27x_2^3}{4} = 8x_2 - 27x_2^3 \Rightarrow \frac{81x_2^3}{4} - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2(\frac{81x_2^2}{4} - 4) = 0 \Rightarrow \frac{81x_2^2}{4} - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2^2 = \frac{16}{81} \Rightarrow x_2 = \frac{4}{9}(\textit{αφού } x_2 > 0)$$

Από την (2) έχουμε

$$c = 8 \cdot \frac{4}{9} - 27 \cdot (\frac{4}{9})^3 \Rightarrow \boxed{c = \frac{32}{27}.}$$

B) Αν f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε για το διαφορικό της f ισχύει $df = f'(x)dx = \frac{df}{dx}dx$.

α)

$$d(uv) = \frac{d}{dx}(uv)dx = \Big(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\Big)dx = u\frac{dv}{dx}dx + v\frac{du}{dx}dx = udv + vdu.$$

β)

$$d\Big(\frac{u}{v}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{u}{v}\Big)dx = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}dx = \frac{v\frac{du}{dx}dx - u\frac{dv}{dx}dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$