

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εισηγητής: Βασίλειος Ν. Κασίκης

Μάθημα: Μαθηματικά Ι

Τρίτη 22 Σεπτεμβρίου 2015

Θέμα 1ο:

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = C_1 e^x + C_2 x^2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ επαληθεύει την εξίσωση

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)y'' + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y' + (x-1)y = 0. \quad (1 \text{ μονάδα})$$

B) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}$. (1 μονάδα)

Θέμα 2ο:

A) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{a^x + a^{-x}} dx$, $a > 0$. (1.5 μονάδες)

B) Αν η συνάρτηση ζήτησης δίνεται από τη σχέση $q(p) = k \cdot p^m$, $k, m > 0$, να δείξετε ότι η ελαστικότητα της ζήτησης είναι

$$\epsilon_d = \frac{\ln\left(\frac{q}{k}\right)}{\ln p}. \quad (1 \text{ μονάδα})$$

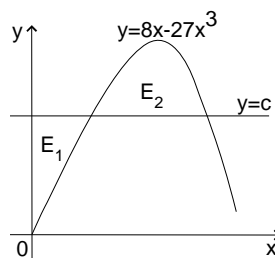
Θέμα 3ο:

A) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. (1 μονάδα)

B) Να χρησιμοποιήσετε πεπλεγμένη παραγωγή για να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = y(x)$ στο σημείο (x_0, y_0) , αν $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ και $(x_0, y_0) = (3, 1)$. (1.5 μονάδες)

Θέμα 4ο:

A) Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια οριζόντια γραμμή $y = c$ η οποία τέμνει την καμπύλη $y = 8x - 27x^3$. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό c ώστε για τα εμβαδά E_1, E_2 να ισχύει $E_1 = E_2$. (3 μονάδες)



B) Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες για τα διαφορικά, όπου u, v συναρτήσεις του x :

α) $d(uv) = vdu + u dv$ και β) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$. (1 μονάδα)