Εκφωνήσεις και ενδεικτικές (αναλυτικές) λύσεις των θεμάτων που τέθηκαν στην εξέταση:

Μαθηματικά Ι, 9 Φεβρουαρίου 2018.

Οι λύσεις που δίνονται είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν είναι μοναδικές. Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης που είναι εξίσου ορθοί.

Θέμα 1ο:

Η ελαστικότητα της ζήτησης στο σημείο (P, Q) δίνεται από τη σχέση

$$\epsilon_d = -\frac{P}{100-P}.$$

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση ζήτησης, αν είναι γνωστό ότι όταν το προϊόν πωλείται σε τιμή 20 χρηματικές μονάδες, η ζητούμενη ποσότητα είναι 1000 μονάδες.

(2 μονάδες)

Λύση: Είναι $\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{P}{100-P}$, οπότε $\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{100-P}dP$. Με ολοκλήρωση έχουμε $\int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{1}{100-P}dP$ και $\ln Q = \ln(100-P) + C, P > 0$. Άρα $Q = C_0 \cdot (100-P)$, και για $P = 20$, $Q = 1000$ έχουμε $C_0 = 12.5$. Η συνάρτηση ζήτησης είναι η $Q(P) = 12.5(100-P)$.

Θέμα 2ο:

¨Οταν το οριακό κόστος αυξάνεται, το μέσο κόστος επίσης αυξάνεται¨. Συμφωνείτε με την πρόταση αυτή; Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(2 μονάδες)

Λύση:

Αν $TC(Q)$ είναι η συνάρτηση κόστους, τότε η συνάρτηση οριακού κόστους είναι $MC(Q) = TC\,'(Q)$ και η συνάρτηση μέσου κόστους είναι $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$. Επίσης, είναι:

$$AC\,'(Q) = \frac{TC\,'(Q) \cdot Q - TC(Q)}{Q^2} = \frac{MC(Q) - AC(Q)}{Q}.$$

Επομένως, το μέσο κόστος αυξάνεται όταν το οριακό κόστος υπερβαίνει το μέσο κόστος $(MC > AC)$. Όταν το οριακό κόστος απλώς αυξάνεται, δεν αυξάνεται απαραίτητα και το μέσο κόστος. Για παράδειγμα, αν $TC(Q) = Q^2 + aQ + b$, με $a > 0$ και $b > 0$ τότε $MC(Q) = 2Q + a > 0$ και $AC(Q) = Q + a + \frac{b}{Q}$, επομένως $AC\,'(Q) = 1 - \frac{b}{Q^2}$. Αν και το οριακό κόστος αυξάνεται για κάθε Q, το μέσο κόστος μειώνεται για $Q < \sqrt{b}$. Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

Θέμα 3ο: Να υπολογίσετε την $\frac{dy}{dx}$, αν ισχύει

$$e^{2y}\ln x^2 - y^3x + \ln(xy) = 21.$$

(2 μονάδες)

Λύση:

Εφαρμόζουμε πεπλεγμένη παραγώγιση, οπότε:

$$e^{2y}\ln x^2 - y^3x + \ln(xy) = 21 \Rightarrow 2y'e^{2y}\ln x^2 + e^{2y}\cdot\frac{2}{x} - 3y^2xy' - y^3 + \frac{1}{xy}\cdot(xy)' = 0 \Rightarrow$$

$$2y'e^{2y}\ln x^2 + e^{2y}\cdot\frac{2}{x} - 3y^2xy' - y^3 + \frac{1}{xy}\cdot(y + xy') = 0 \Rightarrow \left(2e^{2y}\ln x^2 - 3y^2x + \frac{1}{y}\right)y' = -e^{2y}\cdot\frac{2}{x} + y^3 - \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-e^{2y}\cdot\frac{2}{x} + y^3 - \frac{1}{x}}{2e^{2y}\ln x^2 - 3y^2x + \frac{1}{y}}.$$

Θέμα 4ο: Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2 + 2x + 10}{(x+1)^2(x^2+2)}dx.$$

(3 μονάδες)

Λύση: Γράφουμε το ολοκλήρωμα με μορφή ορίου,

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2 + 2x + 10}{(x+1)^2(x^2+2)}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^{k}\frac{x^2 + 2x + 10}{(x+1)^2(x^2+2)}dx.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2 + 2x + 10}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2x}{x^2+2}$$

οπότε

$$\int_1^{k}\frac{x^2 + 2x + 10}{(x+1)^2(x^2+2)}dx = \int_1^{k}\frac{2}{x+1}dx + \int_1^{k}\frac{3}{(x+1)^2}dx - \int_1^{k}\frac{2x}{x^2+2}dx =$$

$$[2\ln|x+1|]_1^k - [\frac{3}{x+1}]_1^k - [\ln(x^2+2)]_1^k = 2\ln(k+1) - 2\ln 2 - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{2} - \ln(k^2+2) + \ln 3 =$$

$$\ln\left(\frac{k^2+2k+1}{k^2+2}\right)-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{2}+\ln 3-2\ln 2.$$

Όμως

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2+2k+1}{k^2+2}=1 \text{ και } \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k+1}=0,$$

επομένως τελικά έχουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει και

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2+2x+10}{(x+1)^2(x^2+2)}dx=\frac{3}{2}+\ln\frac{3}{4}.$$

Θέμα 5ο: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}x^i\right)dx.$$

(2 μονάδες)

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $x\in[0,\frac{1}{2}]$ επομένως η γεωμετρική σειρά συγκλίνει. Είναι

$$\sum_{i=0}^{+\infty}x^i=\frac{1}{1-x}.$$

Επομένως το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}x^i\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}dx=[-\ln|1-x|]_0^{\frac{1}{2}}=\ln 2.$$