Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με παραγοντική ολοκλήρωση

evanmelas@gmail.com

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

1) $\int x e^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = \dots$

2) $\int x^2 e^x\,dx = \int x^2(e^x)'\,dx = \dots$

3) $\int x \ln x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx =$

$= \cancel{\int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x\,dx}$ X = ΔΕΝ

ΟΔΗΓΟΥΜΑΙ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ

$\cancel{\int \left(\frac{x^3}{3}\right)' e^x\,dx}$

$\cancel{\int x (x\ln x - x)'\,dx}$

$$(x\ln x - x)' = \ln x + \cancel{x\frac{1}{x}} - \cancel{1}$$

4) $\quad I=\int x^3 \ln x \, dx$ (2)

Υπάρχουν 2 επιλογές

1η

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$I=\int\left(\frac{x^4}{4}\right)'\ln x\,dx \quad \frac{f(x)=\frac{x^4}{4}}{g(x)=\ln x} \quad \frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^4}{4}(\ln x)'dx$$

$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^4\frac{1}{x}dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}+c\right) = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}c$$ 3

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + c_1,\ c_1 = -\frac{1}{4}c,\ c\in\mathbb{R},\ c_1\in\mathbb{R}$$

2η επιλογή

$$I = \int x^3 \ln x\,dx = \int x^3 (x\ln x - x)'\,dx =$$

$f(x) = x\ln x - x$

$g(x) = x^3$

$$(x\ln x - x)x^3 - \int (x^3)'(x\ln x - x)\,dx$$

Έτσι δεν οδηγούμαι στον υπολογισμό του I

Άσκηση

④

Υπολογίστε το $\int x^n \ln x \, dx, \ n \geq 1$

5) $(x\ln x - x)' = \ln x \Leftrightarrow$

$\int \ln x \, dx = x\ln x - x + c, \ c \in \mathbb{R}$

Υπολογίστε το $I = \int \ln x \, dx$

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

$I = \int \ln x \, dx = \int 1 \ln x \, dx = \int x' \ln x \, dx \xrightarrow[g(x) = \ln x]{f(x) = x}$

$$= x\ln x - \int x(\ln x)'dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx$$ 5

$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - (x+c) = x\ln x - x - c$$

$$= x\ln x - x + c_1,\quad c_1 = -c,\ c\in\mathbb{R},\ c_1\in\mathbb{R}$$

6) Υπολογίστε το $I = \int x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$

1η επιλογή

$$I = \int x(\eta\mu x)'dx \ \overset{f(x)=\eta\mu x}{\underset{g(x)=x}{=\!=\!=\!=}}\ x\,\eta\mu x - \int x'\,\eta\mu x\,dx$$

$$= x\,\eta\mu x - \int \eta\mu x\,dx = x\,\eta\mu x - (-\sigma\upsilon\nu x + c)$$

$$= x\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - c = x\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c_1,$$

$c\in\mathbb{R},\ c_1\in\mathbb{R}$

7) Υπολογίστε το $I=\int x^2 \eta\mu x \, dx$ (7)

$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$

$$I=\int x^2 \eta\mu x \, dx = \int x^2 (-\sigma\upsilon\nu x)' dx \quad \frac{f(x) = -\sigma\upsilon\nu x}{g(x) = x^2}$$

$$= -\sigma\upsilon\nu x \; x^2 - \int (-\sigma\upsilon\nu x)(x^2)' dx = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + \int \sigma\upsilon\nu x \, 2x \, dx$$

$$= -x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2\int x \sigma\upsilon\nu x \, dx \quad (\alpha)$$

$$\int x \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int x (\eta\mu x)' dx = x \eta\mu x - \int x' \eta\mu x \, dx = x \eta\mu x - \int \eta\mu x \, dx$$

$$= x \eta\mu x - (-\sigma\upsilon\nu x + c) = x \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - c \quad (b)$$

Από α και β έχω 8

$$I = -x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2(x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - c)$$
$$= -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x - 2c$$
$$= -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x + c_1,$$
$$c_1 = -2c,\ c \in \mathbb{R},\ c_1 \in \mathbb{R}$$

2η επιλογή

$$I = \int x^2 \eta\mu x\, dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \eta\mu x\, dx = \frac{x^3}{3}\eta\mu x - \int \frac{x^3}{3}(\eta\mu x)'\, dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\eta\mu x - \frac{1}{3}\int x^3 \sigma\upsilon\nu x\, dx$$ που ΔΕΝ μας οδηγεί! στον υπολογισμό του ολοκληρώματος

8. Υπολογίστε το $I=\int e^x \eta\mu x\,dx$

1^{η} επιλογή

$I=\int (e^x)'\eta\mu x\,dx \xrightarrow[g(x)=\eta\mu x]{f(x)=e^x} e^x\eta\mu x-\int e^x(\eta\mu x)'dx$

$=e^x\eta\mu x-\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx \Rightarrow \boxed{I=\int e^x\eta\mu x\,dx=e^x\eta\mu x-\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx}$ (a)

$\int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int (e^x)'\sigma\upsilon\nu x\,dx=e^x\sigma\upsilon\nu x-\int e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx$

$=e^x\sigma\upsilon\nu x-\int e^x(-\eta\mu x)dx=e^x\sigma\upsilon\nu x+\int e^x\eta\mu x\,dx=e^x\sigma\upsilon\nu x+I$

$\Rightarrow \int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx=e^x\sigma\upsilon\nu x+I$ (b)

Από (a) και (b) έχουμε: b

$I = e^x \eta\mu x - \left(e^x \sigma\upsilon\nu x + I\right) = e^x \eta\mu x - e^x \sigma\upsilon\nu x - I$

$\Rightarrow 2I = e^x \eta\mu x - e^x \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} e^x \left(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\right)}$

Επομένως τελικά: $I = \frac{1}{2} e^x (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 11

Επαναλάβετε την 8 αλλά με τη $2^{η}$ επιλογή

Δηλαδή $I=\int e^{x}\eta\mu x\,dx=\int e^{x}(-\sigma\upsilon\nu x)'dx=\cdots$

Και θα πρέπει να επαναλάβετε δύο φορές

$=-e^{x}\sigma\upsilon\nu x-\int (e^{x})'(-\sigma\upsilon\nu x)\,dx=$

$=-e^{x}\sigma\upsilon\nu x+\int e^{x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$

$\int e^{x}\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int e^{x}(\eta\mu x)'dx=e^{x}\eta\mu x-\int (e^{x})'\eta\mu x\,dx$