Παραγώγιση αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Παραγώγιση (τοξεφx)' Β τρόπος

$$y=f(x)=\text{εφ}x \iff \text{τοξεφ}y=x=f^{-1}(y),\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), y\in\mathbb{R}$$

$$x \underset{\text{τοξεφ}}{\overset{\text{εφ}}{\rightleftarrows}} y$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}=\frac{1}{\frac{1}{\text{συν}^2x}}=\text{συν}^2x=\frac{1}{1+\text{εφ}^2x}$$

Διότι $1+\text{εφ}^2x=1+\dfrac{\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\dfrac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\dfrac{1}{\text{συν}^2x} \Longrightarrow$

2

$$\Rightarrow \text{συν}^2 x = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 x}$$

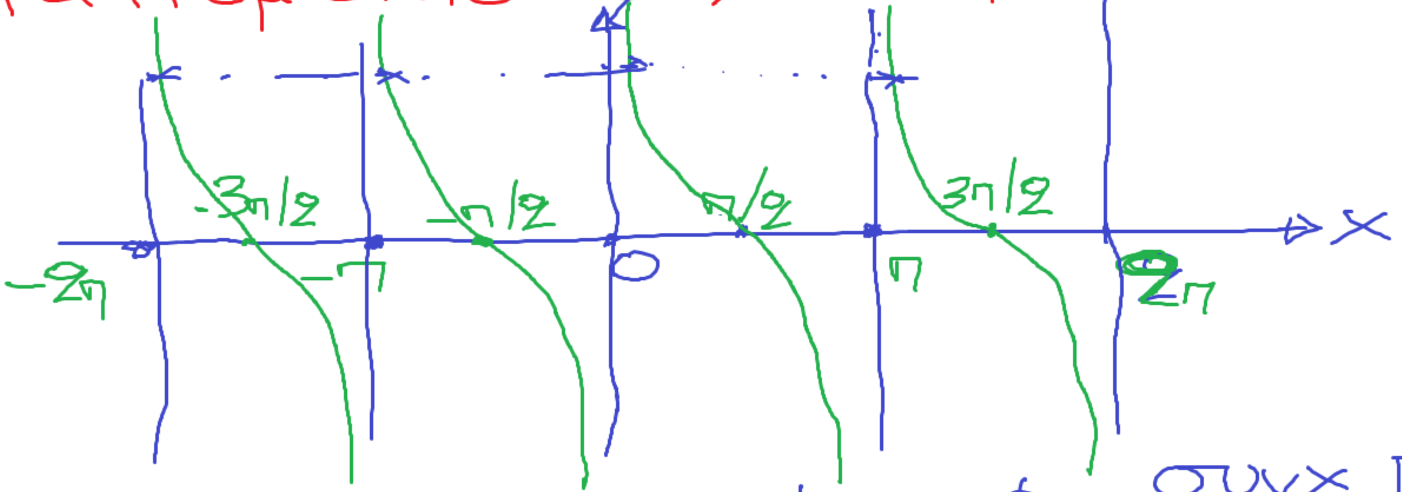
Δηλαδή, $\dfrac{df^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{1+\text{εφ}^2 x} = \dfrac{1}{1+y^2}, \ y \in \mathbb{R}.$

$$\Rightarrow \boxed{(\text{τοξεφ}\, y)' = \frac{1}{1+y^2}, \ y \in \mathbb{R}}$$

ή

$$\boxed{(\text{τοξεφ}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}.}$$

Παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης της (3)
συνεφαπτομένης $y(x)=\sigma\varphi x$



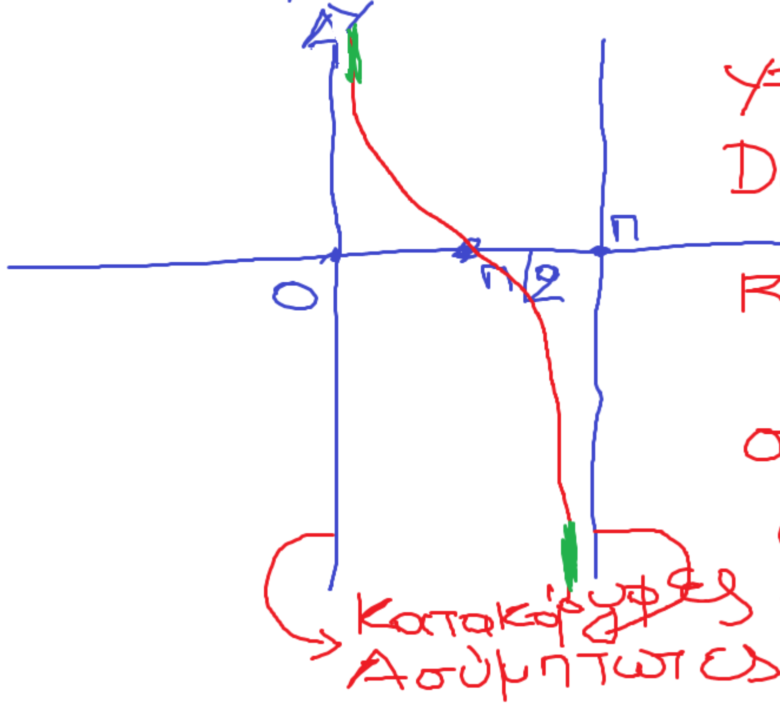
$y(x)=\sigma\varphi x$, $\sigma\varphi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $D(f)=\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

$R(f)=\mathbb{R}$

Η $\sigma\varphi x$ είναι περιοδική, $\sigma\varphi(x+\pi)=\sigma\varphi x, \forall x\in D(f)$.

Επειδή η $\sigma\varphi x$ είναι περιοδική, δεν είναι 1-1 και

Επομένως δεν ορίζεται η αντίστροφη. Αν την περιορίσαμε στο $(0,\pi)$ γίνεται 1-1 και επομένως ορίζεται η αντίστροφη. Θα μπορούσαμε να την περιορίσουμε σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(\kappa\pi, \pi+\kappa\pi)$ $\kappa\in\mathbb{Z}$.



$y=f(x)=\sigma\varphi x$

$D(f)=(0,\pi)$

$R(f)=\mathbb{R}$

$f(x)\downarrow$

$\sigma\varphi\frac{\pi}{2}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\varphi x=+\infty$

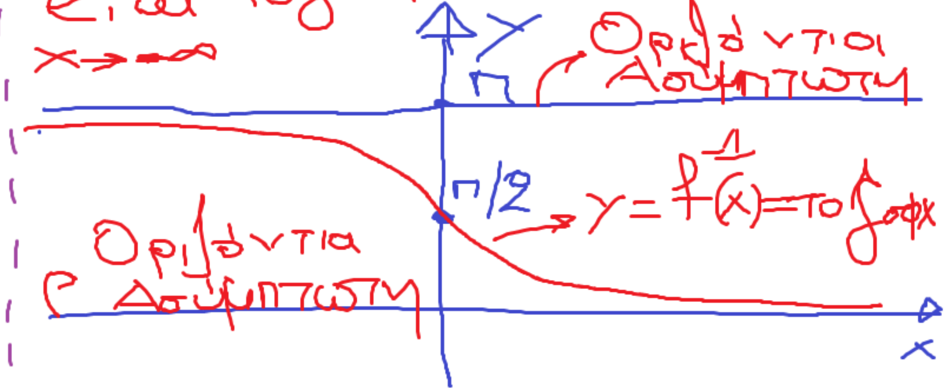
$\lim\limits_{x\to \pi^-}\sigma\varphi x=-\infty$

$y=f^{-1}(x)=\tau o\xi\sigma\varphi x$, $D(f^{-1})=\mathbb{R}$,

$R(f^{-1})=(0,\pi)$, $f^{-1}\downarrow$, $\tau o\xi\sigma\varphi 0=\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\tau o\xi\sigma\varphi x=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\tau o\xi\sigma\varphi x=\pi$



Εύρεση παραγώγου $(\text{τοξσφ}x)'$

Α τρόπος (Ξεκινάμε από την $y=\text{τοξσφ}x$)

$y=\text{τοξσφ}x,\ x\in\mathbb{R},\ y\in(0,\pi)$

$$y=\text{τοξσφ}x \iff \boxed{\text{σφ}y=x}$$

$$x \underset{\text{σφ}}{\overset{\text{τοξσφ}}{\rightleftarrows}} y$$

$$\text{σφ}y=x \Rightarrow -\frac{1}{\text{ημ}^2y}\,y'=x' \Rightarrow y'=-\text{ημ}^2y$$

Αλλά $\text{ημ}^2y=\dfrac{1}{1+\text{σφ}^2y}$

$$\left(1+\text{σφ}^2y=1+\frac{\text{συν}^2y}{\text{ημ}^2y}=\frac{\text{ημ}^2y+\text{συν}^2y}{\text{ημ}^2y}=\frac{1}{\text{ημ}^2y} \Rightarrow \text{ημ}^2y=\frac{1}{1+\text{σφ}^2y}\right)$$

Δηλαδή $y'=(\text{τοξσφ}x)'=-\dfrac{1}{1+\text{σφ}^2y}=-\dfrac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}.$

Δηλαδή, $\boxed{(\text{Τοξσφ}x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}}$ 6

B τρόπος (Ξεκινάμε απο την $y=\sigma\varphi x$)

$y=f(x)=\sigma\varphi x,\ x\in(0,\pi),\ y\in\mathbb{R}$

$y=\sigma\varphi x \Leftrightarrow \text{Τοξσφ}\,y = x = f^{-1}(y).$

Από Θεώρημα

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}} = -\eta\mu^2 x = -\frac{1}{1+\sigma\varphi^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}$$

$\Rightarrow \boxed{(\text{Τοξσφ}\,y)' = -\frac{1}{1+y^2},\ y\in\mathbb{R}}$, ή, $\boxed{(\text{Τοξσφ}x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}}$

Ολοκληρώματα

Αόριστα Ολοκληρώματα

Έστω συνάρτηση $f(x)$ και έστω μία συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$. Η $F(x)$ λέγεται παράγουσα ή αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$. Γράφουμε

$$\Rightarrow \quad F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x)$$

Παρατηρήσεις

1. Αν $F'(x)=f(x)$ τότε και $(F(x)+c)'=F'(x)+c'=f(x)$, $c\in\mathbb{R}$. Το αόριστο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ΠΑΝΤΑ

ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΘΑΙΡΕΣΙΑ ΜΙΑΣ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ

Δηλαδή γράφουμε $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}}$

2.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Αλλά $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Δηλαδή $\int F'(x)\,dx = F(x) + c$, ή

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x) + c$$

Υπενθύμιση.

1. $(\ln|x|)'$, $x \in \mathbb{R}^*$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $x > 0$ $\quad |x| = x \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $x < 0$ $\quad |x| = -x \Rightarrow (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

2. $(\ln|f(x)|)'$, $f(x) \in \mathbb{R}^*$

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Απόδειξη

- $f(x)>0 \quad |f(x)|=f(x) \Rightarrow (\ln|f(x)|)' = (\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $f(x)<0 \quad |f(x)|=-f(x) \Rightarrow (\ln|f(x)|)' = (\ln(-f(x)))' = \dfrac{-f'(x)}{-f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

3. $(2^x)' = 2^x \ln 2, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad a>0$

4. $(x^a)' = a x^{a-1}$

Ολοκληρώματα Βασικών Συναρτήσεων

1. $$\int x^{a}\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\quad a \neq -1,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{a+1}}\cancel{(a+1)}\,x^{a+1-1} = x^{a}$$

2. $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\quad x \in \mathbb{R}^{*},\ c \in \mathbb{R}$$

3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c, \; f(x) \in \mathbb{R}^*, \; c \in \mathbb{R}$

4. $\int \sigma\upsilon\nu x \, dx = \eta\mu x + c, \; x \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{R}$

5. $\int \eta\mu x \, dx = -\sigma\upsilon\nu x + c, \; x \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{R}$

6. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c, \; x \in \mathbb{R} - \{(2\kappa+1)\frac{\pi}{2},$
$\kappa \in$ ακεραίους$\}, \; c \in \mathbb{R}.$

7. $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = -\sigma\varphi x + c,\ x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in$ ακεραίους$\},\ c \in \mathbb{R}$

8. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R}$

9. $\int e^x\,dx = \frac{e^x}{\ln e} + c = \frac{e^x}{1} + c = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$

10. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{τοξεφ}\,x + c,\ x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

11. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arcctg} x + C,\ x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,\ x \in (-1,1),\ C \in \mathbb{R}$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + C,\ x \in (-1,1),\ C \in \mathbb{R}$

Βασικές Ιδιότητες ολοκλήρωσης

1. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)dx$

2. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \ \lambda \in \mathbb{R}$

3. $\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx,$
$a, b \in \mathbb{R}$ (Συνδυασμός των 1 και 2)

4. $\int F'(x)dx = F(x)+c$, ή $\int \frac{dF(x)}{dx}dx = F(x)+c$

5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C,\ f(x) \in \mathbb{R}^*,\ C \in \mathbb{R}$ 16