① Ολοκληρώματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης που οδηγούν στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega = \tau o \xi \epsilon \varphi \omega + c$$

Παράδειγμα

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 10x}\,dx$

Υπολογισμός

$$I=\int \frac{1}{x(\ln^2 x+10)}\,dx$$

Θέτω $\omega = \ln x$.

$\boxed{\omega = \ln x} \Rightarrow d\omega = d(\ln x) = (\ln x)'dx$

$\Rightarrow \boxed{d\omega = \frac{1}{x}dx}$

Επομένως το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$I = \int \frac{1}{\omega^2+10}\,d\omega = \int \frac{1}{10\left(\left(\frac{\omega}{\sqrt{10}}\right)^2+1\right)}\,d\omega = \frac{1}{10}\int \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\sqrt{10}}\right)^2+1}\,d\omega$$

Θέτω $\boxed{k = \frac{\omega}{\sqrt{10}}} \Rightarrow dk = d\left(\frac{\omega}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{\omega}{\sqrt{10}}\right)' d\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow dk = \frac{1}{\sqrt{10}}\,d\omega \Rightarrow \boxed{d\omega = \sqrt{10}\;dk}$. Επομένως

$$I = \frac{1}{10}\int \frac{\sqrt{10}}{k^2+1}\,dk = \frac{1}{\sqrt{10}\cancel{\sqrt{10}}}\cancel{\sqrt{10}}\int \frac{1}{k^2+1}\,dk = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\text{τοξεφ}\,k + c\right)$$

Παράδειγμα

4

6. Υπολογίστε το $I = \int \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x} dx$

Υπολογισμός

$$I = \int \frac{\frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}}{\frac{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}} dx = \int \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}}{\frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} + 1} dx =$$

$$= \int \frac{\varepsilon\varphi x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\varepsilon\varphi^4 x + 1} dx.$$

Θέτω $\omega = \varepsilon\varphi^2 x \Rightarrow d\omega = d(\varepsilon\varphi^2 x)$

$\Rightarrow d\omega = (\varepsilon\varphi^2 x)' dx = 2\varepsilon\varphi x (\varepsilon\varphi x)' dx \Rightarrow$

$\Rightarrow d\omega = 2\varepsilon\varphi x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \longrightarrow$

Παράδειγμα

6. Υπολογίστε το $I=\int \frac{ημx\,συνx}{ημ^4x+συν^4x}\,dx$

Υπολογισμός

$$I=\int \frac{\frac{ημx\,συνx}{συν^4x}}{\frac{ημ^4x+συν^4x}{συν^4x}}\,dx=\int \frac{\frac{ημx}{συνx}\cdot\frac{συνx}{συν^3x}}{\frac{ημ^4x}{συν^4x}+1}\,dx=$$

$$=\int \frac{εφx\,\frac{1}{συν^2x}\,dx}{εφ^4x+1}.$$

Θέτω $ω=εφ^2x \Rightarrow dω=d(εφ^2x)$

$\Rightarrow dω=(εφ^2x)'dx=2εφx(εφx)'dx \Rightarrow$

$\Rightarrow dω=2εφx\,\frac{1}{συν^2x}\,dx \longrightarrow$

5

$$\Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{2}}{\omega^2+1}\,d\omega=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\omega^2+1}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\left(\text{τοξεφ}\,\omega+c\right)=\frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\left(\text{εφ}^2x\right)+\frac{1}{2}c$$

$$=\frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\left(\text{εφ}^2x\right)+C,\quad C=\frac{1}{2}c,\ c\in\mathbb{R},\ C\in\mathbb{R}$$

$\omega=(\text{εφ}x)^2\Rightarrow d\omega=\left[(\text{εφ}x)^2\right]'dx\Rightarrow$

$\Rightarrow d\omega=2\,\text{εφ}x\,\frac{1}{\text{συν}^2x}\,dx$

$$\int\frac{\text{ημ}x\,\text{συν}x}{\text{ημ}^4x+\text{συν}^4x}\,dx$$

$$\frac{\dfrac{\text{ημ}x\,\text{συν}x}{\text{συν}^4x}}{\dfrac{\text{ημ}^4x}{\text{συν}^4x}+1}=\frac{\text{εφ}x\,\dfrac{1}{\text{συν}^2x}}{\text{εφ}^4x+1}$$

$\omega=\text{εφ}^2x\Rightarrow d\omega=2A$

Μέθοδος της παραγοντικής ⑥ ολοκλήρωσης

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + \underline{f(x)g'(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = \int\left((f(x)g(x))' - f(x)g'(x)\right)dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = \boxed{\int (f(x)g(x))'\,dx} - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Γνωρίζουμε $\int F'(x)\,dx = F(x)+c$

Επομένως $\int \left(f(x)g(x)\right)'dx = f(x)g(x)+c$

Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)+c-\int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx \quad (1)}$$

Παράδειγμα

1. Υπολογίστε το $\int x e^{x} dx$

Υπολογισμός

(1) $\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$

$$\int e^{x} x \, dx = \int (e^{x})' x \, dx \quad \frac{f(x) = e^{x}}{g(x) = x}$$

$$= e^{x} x - \int e^{x} x' \, dx = e^{x} x - \int e^{x} dx$$

$$= e^{x} x - (e^{x} + c) = e^{x} x - e^{x} - c = e^{x} x - e^{x} + C', \; C' = -c$$

$c \in \mathbb{R}, \; C' \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα

2. Υπολογίστε το $\int x^2 e^x dx$

Υπολογισμός

(1) $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

$\int e^x x^2 dx = \int (e^x)' x^2 dx$ $\quad \dfrac{f(x)=e^x}{g(x)=x^2}$

$= e^x x^2 - \int e^x (x^2)' dx = e^x x^2 - \int e^x 2x\, dx = e^x x^2 - 2\int e^x x\, dx$

$= e^x x^2 - 2\left(\int (e^x)' x\, dx\right) = e^x x^2 - 2\left(e^x x - \int e^x x' dx\right) = e^x x^2 - 2\left(e^x x - (e^x + c)\right)$

$$= e^x x^2 - 2e^x x + 2(e^x + c) = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + 2c$$ 10

$$= e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C_1, \quad C_1 = 2c,\ c \in \mathbb{R},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα

3 Υπολογίστε το $\int x \ln x \, dx$

Υπολογισμός

(1) $$\int f'(x) g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$$

$$\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx \qquad \frac{f(x) = \frac{x^2}{2}}{g(x) = \ln x} \qquad \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}c$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C, \quad C = -\frac{1}{2}c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$$