Προσέξτε τις συνδυαστικές ασκήσεις

①

Άσκηση

Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης $\frac{y}{1+y} + \frac{x}{1+x} - x^2y^3 = 0$ (1) στο σημείο (1,1).

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,1) της ευθείας (1) δίνεται από

$$y - 1 = y'(1)(x-1), \quad (2)$$

όπου $y'(1)$ είναι η παράγωγος της (1) στο ②
σημείο $x=1$.

$$\frac{y}{1+y}+\frac{x}{1+x}-x^2y^3=0 \Rightarrow \frac{y'(1+y)-y(1+y)'}{(1+y)^2}+$$

$$\frac{x'(1+x)-x(1+x)'}{(1+x)^2}-\left(2xy^3+3x^2y^2y'\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'(1+y)-yy'}{(1+y)^2}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}-2xy^3-3x^2y^2y'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-2xy^3-3x^2y^2y'=0 \quad (3)$$

Στη (3) θέτω $x=1$, $y=1$, και έτσι βρίσκω την $y'(1)$:

$$\frac{y'(1)}{4}+\frac{1}{4}-2-3y'(1)=0 \Rightarrow \frac{y'(1)}{4}-3y'(1)=2-\frac{1}{4} \Rightarrow$$

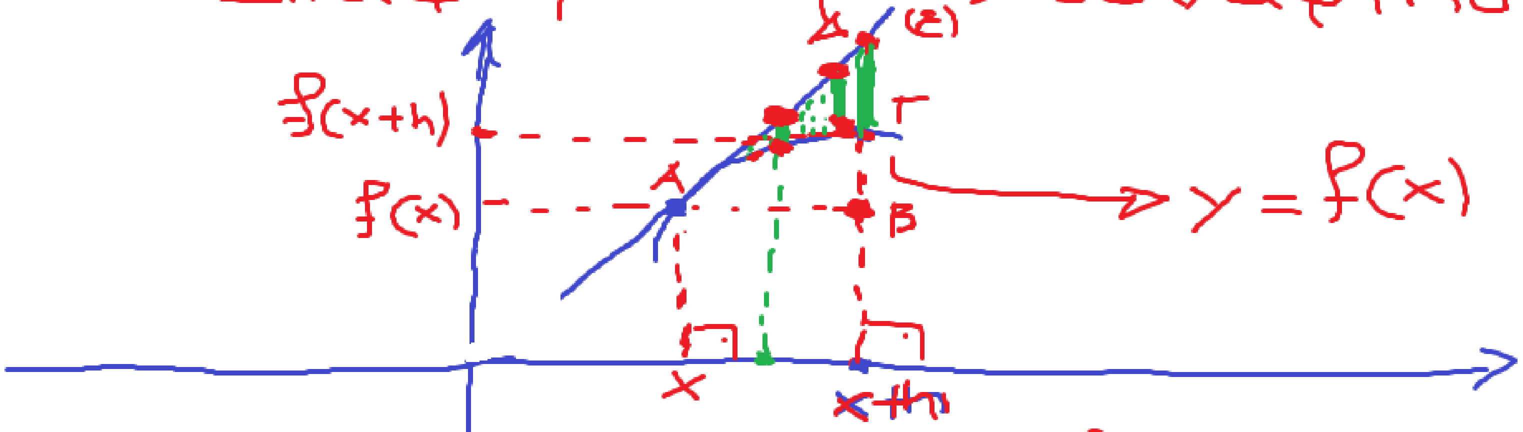
3

$$\Rightarrow \frac{-11y'(1)}{\cancel{4}}=\frac{7}{\cancel{4}} \Rightarrow \boxed{y'(1)=-\frac{7}{11}}$$

Αν/στούμε στην $y-1=y'(1)(x-1)$ και παίρνω

με $\boxed{y-1=-\frac{7}{11}(x-1)}$ Αυτή είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας

Διαφορικό μιας συνάρτησης



(ε) είναι η εφαπτόμενη ευθεία της $y=f(x)$ στο $(x, f(x))$.

$A(x, f(x))$, $\Gamma(x+h, f(x+h))$.

$$B\Delta - B\Gamma = \Gamma\Delta.$$

Παίρνουμε x σταθερό και αφήνουμε το h να μικραίνει.

Καθώς το h μικραίνει το ΓΔ μικραίνει και το (5)
ΒΓ τείνει να γίνει ίσο με το ΒΔ. Δηλαδή έχουμε
για μικρά h,

$$\boxed{B\Gamma \approx B\Delta} \quad (1)$$

($\approx$ σημαίνει περίπου ίσο)

$$\boxed{B\Gamma = f(x+h) - f(x)} \quad (2)$$

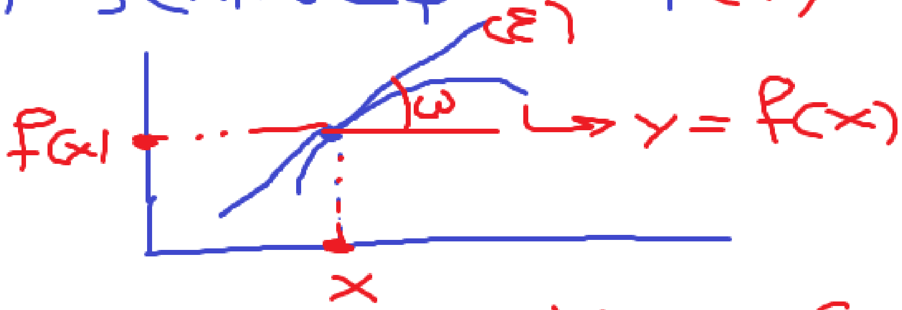
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, που είναι ορθογώνιο στο Β έχω

$A(x, f(x))$, $AB = h$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{B\Delta}{h} \Rightarrow \boxed{B\Delta = \varepsilon\varphi\omega \cdot h} \quad (3)$$

Αν συνδυάσουμε τις (1),(2),(3), παίρνουμε ⑥

$$f(x+h)-f(x) \approx \varepsilon\varphi\omega \cdot h \quad (4)$$



Επειδή η (ε) είναι η εφαπτόμενη ευθεία της $y=f(x)$ στο $(x, f(x))$ έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = f'(x)$ (5)

$$(4),(5) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x+h)-f(x) \approx f'(x)\cdot h \iff \\ f(x+h) \approx f(x)+f'(x)\cdot h \quad (6) \end{array}}$$

Η προσέγγιση (6) γίνεται καλύτερη καθώς (7)
Το h μικραίνει.

$$f(x+h) \approx f(x) + \boxed{f'(x)h} \quad (6)$$

Παρατήρηση

$(6) \Leftrightarrow f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Αλλά αυτός, όταν $h \to 0$,

είναι ο ορισμός της παραγώγου.

Διαφορικό μιας συνάρτησης.

Ορίζω το διαφορικό $df(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ να είναι

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx \quad (7)}$$

Το dx, λέγεται διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής x, και είναι για απειροστή μεταβολή (απειροστή = πολύ μικρή) των τιμών της x. (8)

Δηλαδή $dx \underset{h \to 0}{=\!=} h$

Από τις (6), (7) έχω:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h = f(x) + \boxed{f'(x)dx} =$$

$$= f(x) + df(x) \Longrightarrow \boxed{f(x+h) - f(x) \approx df(x)} \quad (8)$$

Η σχέση (8) μας δίνει την ερμηνεία του διαφορικού $df(x)$: (9)

$df(x)$ είναι η μεταβολή $f(x+h)-f(x)$ που προκαλείται στη τιμή της $f(x)$ από μία μικρή μεταβολή h στη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Παρατήρηση

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

Μεταβολή στη τιμή της $f(x)$

Ρυθμός μεταβολής

Μικρή μεταβολή στο x

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιείστε την έννοια του διαφορικού για να υπολογίσετε προσεγγιστικά την $\sqrt[3]{25}$

Λύση

$$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad x=27 \quad h=-2$

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$$

(ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΡΙΖΩΝ $\sqrt[3]{a\cdot b} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$)

$$\Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{27}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

11

$$\sqrt[3]{27} = 3 \quad (3\cdot 3\cdot 3 = 3^3 = 27)$$

Αντικαθιστούμε στην $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$

και έχουμε

$$\sqrt[3]{27+(-2)} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-2) \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{25} \approx 3 - \frac{2}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{25} \approx \frac{79}{27}$$

2.

Άσκηση

Υπολογίστε με τη χρήση διαφορικού την ποσότητα $\ln(1.02)$

Λύση

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

$f(x) = \ln x$, $\boxed{x = 1}$, $h = 0.02$,

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1.$

Αν/στοιχούμε και βρίσκουμε:

$$\ln(1+0.02) \approx \ln 1 + 1 \cdot 0.02 = 0.02 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln(1.02) \approx 0.02$

Άσκηση

3.

Χρησιμοποιείστε την έννοια του διαφορικού για να υπολογίσετε προσεγγιστικά το $1.01^{1.01}$

Λύση

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

$f(x) = x^x$, $x = 1$, $h = 0.01$, $f(x) = x^x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x\ln x}\left(x'\ln x + x(\ln x)'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^x\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

Επομένως $f'(1) = 1^1(\ln 1 + 1) = 1$.

Αντιστοιχούμε και βρίσκουμε

$$(1+0.01)^{(1+0.01)} \approx 1^1 + 1\cdot 0.01 = 1.01 \Rightarrow$$

$$1.01^{1.01} \approx 1.01$$